1

Beispiel Kurvendiskussion

$$f(x) = \frac{1}{48}\cdot\left[x^4 - 24x^2 + 80\right]$$

(a) Symmetrie

$$f(-x) = \frac{1}{48}\left[(-x)^4 - 24(-x)^2 + 80\right]$$

$$= \frac{1}{48}\left[x^4 - 24x^2 + 80\right]$$

$$-f(x) = -\frac{1}{48}\left[x^4 - 24x^2 + 80\right]$$

Offenbar gilt: $f(x) = f(-x)$

Der Graph ist y-Achsensymmetrisch

(b) Nullstellen $f(x) = 0$

$$\Longleftrightarrow \boxed{x^4 - 24x^2 + 80 = 0}$$

Wir substituieren

$$x^2 = z$$

$$\boxed{z^2 - 24z + 80 = 0}$$

$$z_{1,2} = 12 \pm \sqrt{144 - 80}$$

$$= 12 \pm \sqrt{64}$$

$$z_1 = 12 + 8 = 20 \checkmark$$

$$z_2 = 12 - 8 = 4 \checkmark$$

384

Kurvendiskussion ganz rational

Rücksubstitution

$x^2 = z_1$

$x^2 = 20$

$x_1 = +\sqrt{20} = +2\sqrt{5}$

$x_2 = -\sqrt{20} = -2\sqrt{5}$

$x^2 = z_2$

$x^2 = 4$

$x_3 = +\sqrt{4} = 2$

$x_4 = -\sqrt{4} = -2$

4 Nullstellen

Extrema

Notwendige Bed: $f'(x) = 0$

$f'(x) = \frac{1}{48}\left[4x^3 - 48x\right]$ ✓

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 48x = 0$

$\Leftrightarrow 4x\left[x^2 - 12\right] = 0$

$x_1 = 0$ ✓

$x_2 = +\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ ✓

$x_3 = -\sqrt{12} = -2\sqrt{3}$ ✓

Hinreichende Bed. $f'(x)=0 \wedge f''(x)\neq 0$

$$f''(x)=\left\{\frac{1}{48}\left[4x^3-48x\right]\right\}'$$

$$=\frac{1}{48}\left[12x^2-48\right]$$

$$f''(0)=\frac{1}{48}\cdot\left[-48\right]=-1<0$$

rel.

$(0|f(0))$ ist Maximum

$$f''(\sqrt{12})=\frac{1}{48}\left[12\cdot\sqrt{12}^2-48\right]>0$$

$(\sqrt{12}|f(\sqrt{12}))$ ist Minimum

und wegen der y-Achsensymm. ist

$(-\sqrt{12}|f(-\sqrt{12}))$ ebenfall Minimum

Wendestellen/-punkte

Notw. Bed $\quad f''(x)=0$

$$f''(x)=\frac{1}{48}\left[12x^2-48\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \quad 12x^2-48=0 \quad |+48 \,|:12$$

$$x^2=4$$

$$x_1=+2 \quad x_2=-2$$

hinr. Bed $\quad f''(x)=0 \wedge f'''(x)\neq 0$

$$f'''(x)=\frac{1}{48}\left[24x\right]$$

$$f'''(2)=\frac{1}{48}\left[24\cdot 2\right]\neq 0 \quad ✓$$

und wg. der Achsensymm.

$$f'''(-2)\neq 0$$

$(2|f(2))$ ist Wendepunkt ✓

$(-2|f(-2))$ ist Wendepunkt ✓

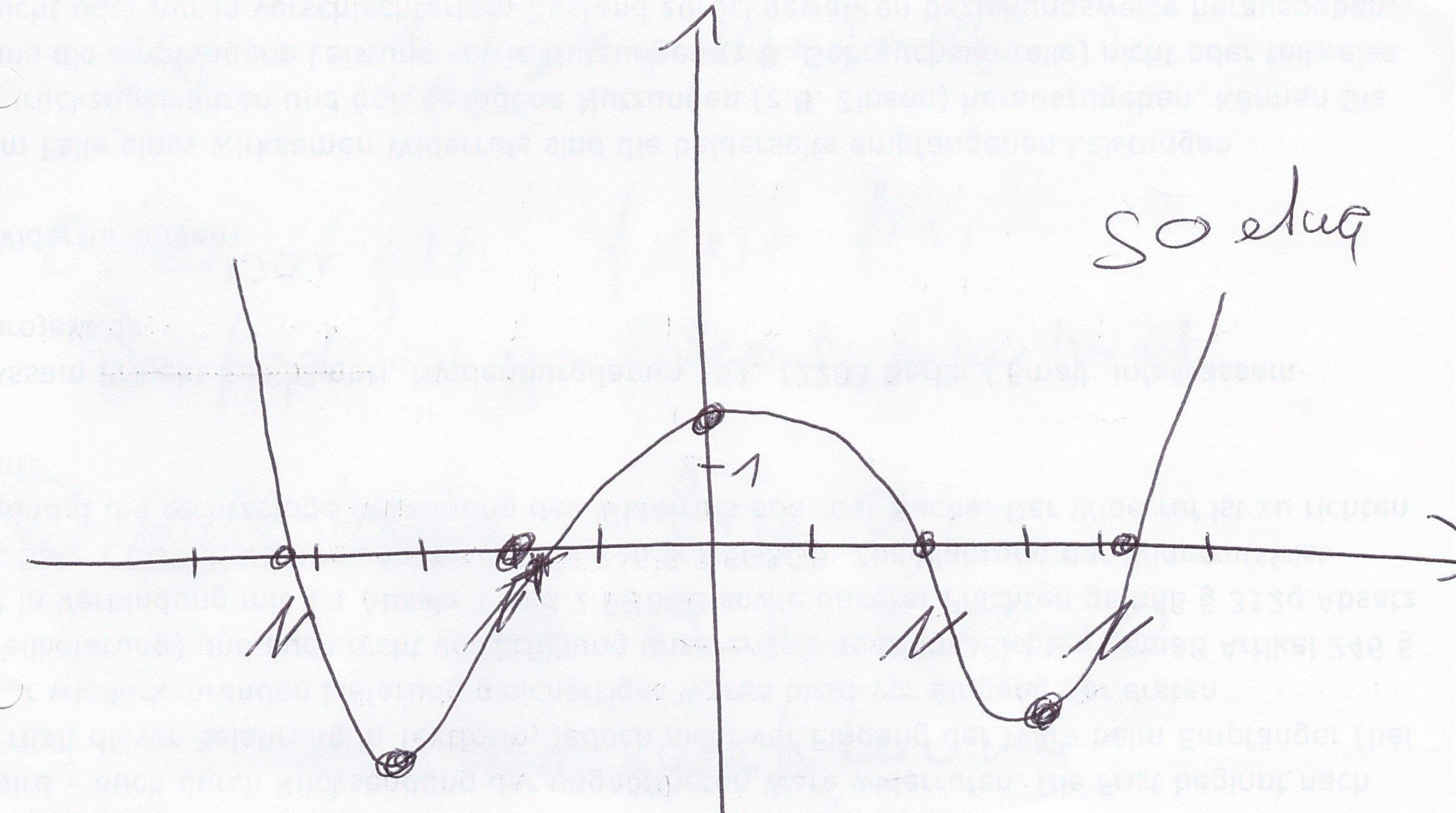
4

Ein Wendepunkt mit horizontaler Wendetangente heißt „Sattelpunkt"

Gibt keine ($f'(2) \neq 0$; $f'(-2) \neq 0$)

nicht da.

So etwa



Unterlagen:

www.raphael-bove.de