Höhere Mathematik

für

Studienanfänger,

Nebenfächler usw.

Video 11

Taylorpolynom und

Restglied

ube.com/watch?v=fcoCumPDwXA&index=2&list=PLnqFfKzISF-xwk4WN0qrYGpIen-GUEDjO

mazon · Sonstiges · Linux · Meine Ablage - Goo · Kontrollpanel Einlog · Login · Internet-Filiale - Spa · Arabischkurs online · Das All und das Nic · Mütze DIY (+Schnitt · How to Play

tikaufgaben

ab508taylorreihen.pdf - Master PDF Editor (NOT REGISTERED)

Datei Bearbeiten Ansicht Einfügen Anmerkungen Formulare Dokument Werkzeuge Hilfe

508 Taylorreihen

Warum geht es?

„Komplizierte" Funktionen werden „einfache" Funktionen ersetzt durch

Beispiel

$f(x) = \sin(x)$
$f(x) = e^x$
$f(x) = \log(1+x)$
$f(x) = \frac{1}{1-x}$
$\rightarrow$ Polynome ersetzt, Zahlen, addieren ... n-ten Grades

Hinweis: Alle folgenden Betrachtungen werden zu einer Vereinfachung –

Pfad
Geometrie
Stil
Art: Strich
Füllung
Farbe: Schwarz
Deckkraft: 100%
Strich
Farbe: Schwarz
Deckkraft: 100%
Zeilenbreite: 1
Matrix
Beschnittpfad

Taylorreihen

Mathematikaufgaben - 2 / 4

1 · 14:28 · 507 Sektorformel von Leibniz · Mathematikaufgaben

17:12 · 508 Leicht nachvollziehbare Einführung in die Taylorreihen Teil 1 · Mathematikaufgaben

3 · 7:14 · 511 Herleitung der Taylorentwicklung einer gebrochen rationalen Funktion · Mathematikaufgaben

4 · 6:17 · 510 Herleitung der Taylorentwicklung einer logFunktion · Mathematikaufgaben

Inhaltsübersicht

→ Taylorreihe zu $f(x)$ an der Stelle x_0

→ Taylorpolynom und Restglied nach Lagrange

→ Beispiele

Taylorentwicklung an der Stelle x_0 zur Funktion $f(x)$:

2

$X = V_0 + h$

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)^1 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}\cdot(x-x_0)^{n+1} + \ldots\ldots$$

[Es gibt „unterschiedliche" Schreibweisen]

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)^1 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n}_{\text{Taylorpolynom vom Grad } n} + \underbrace{R_n(x)}_{\text{Restglied s.o.}}$$

[Es gibt "unterschiedliche" Schreibweisen!]

Das Restglied $R_n(x)$

① Um „den Rest der unendlichen Reihe" abzuschätzen, gibt es verschiedene „Restgliedformeln":
- Cauchy | - Euler | - Lagrange | - Schlömilch usw.

② Eine der „gängigsten" ist die Restgliedformel von Lagrange [1736–1813]

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \cdot (x-x_0)^{n+1}$$

Es gibt „verschiedene" Schreibweisen!

$\boxed{\text{Beispiele zur Bemerkung}}$

1. Beispiel

$f(x) = 2x^2 + \cos(x)$

Wir setzen $n=1$ [„lineare Approximation"]
und wählen $x_0 = \pi$ als Entwicklungspunkt.

Wir benötigen

$f^{(0)}(x) = 2x^2 + \cos x$ $\quad f^{(0)}(\pi) = \boxed{2\pi^2 - 1}$

$f'(x) = 4x - \sin x$ $\quad f'(\pi) = 4\pi - 0$

Taylorpolynom für $n=1$

$$\sum_{n=0}^{1} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = \underbrace{\frac{f^{(0)}(\pi)}{0!}\cdot(x-\pi)^0}_{2\pi^2-1} + \underbrace{\frac{f'(\pi)}{1!}(x-\pi)^1}_{4\pi(x-\pi)}$$

$$= 2\pi^2 - 1 \qquad 4\pi(x-\pi)$$

$$= 2\pi^2 - 1 + 4\pi x - 4\pi^2$$

$$= 4x\pi - 2\pi^2 - 1$$

$$= 4\pi\cdot x - 2\pi^2 - 1$$

$n=1$ $x_0=\pi$ $P(x) =$

Für das Restglied R:

$$R_{n+1} = R_2 = \frac{f^{(2)}(c)}{2!}(x-\pi)^2$$

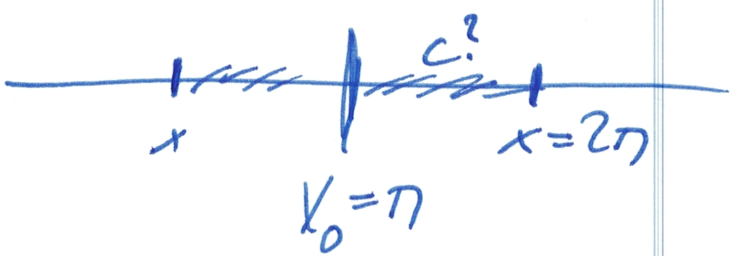
[$n=1$ sagen]

$$f'(x) = 4x - \sin x$$
$$f''(x) = 4 - \cos x$$
$$f''(c) = 4 - \cos c$$

also $$R_2 = \frac{4-\cos(c)}{2}(x-\pi)^2$$

$\pi < c < 2\pi$

Zusätzlich Skizze



Das „R_2" ist natürlich von der Wahl des x abhängig.
Wählt man z.B. $\boxed{x=2\pi}$, so ist $c \in [\pi, 2\pi]$
und

$$R_2 = \frac{4-\cos c}{2} \cdot \pi^2$$
$$= \left(2 - \tfrac{1}{2}\cos c\right) \cdot \pi^2$$

4

Da nun „$\cos c$" stets kleiner gleich $+1$ und größer gleich -1 ist, erhält man für R_2 folgende Abschätzung:

$$R_2 = \Big(2 - \frac{1}{2}\underbrace{\cos c}_{\geq -1 \qquad \leq +1}\Big) \cdot \pi^2$$

also

$$\boxed{\underbrace{1{,}5\pi^2 \leq R_2}_{\cos c \leq 1} \leq \underbrace{2{,}5\pi^2}_{\cos c \geq -1}}$$

2. Beispiel

Die Mac-Laurin-Reihe der e-Funktion – also $x_0=0$ – lautet

$$e^x = 1 + \frac{x^1}{1!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \underbrace{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \dots\dots\dots}_{R_n(x)}$$

Mit $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-0)^{n+1}$

$$= \frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1} \qquad \boxed{0<c<1}$$

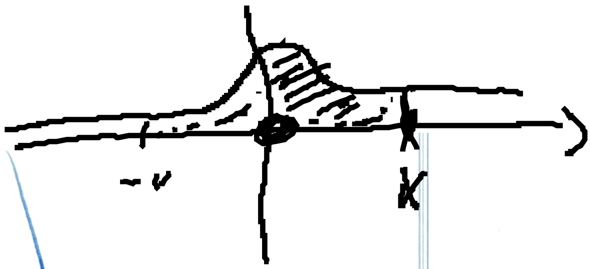
Wir setzen $x=1$ und erhalten eine „Formel" zur Berechnung von $e^1=e$

$$e^1 = e \approx 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$$

und

$$R_n(1) = \frac{e^c}{(n+1)!} < \frac{e^1}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!} \qquad 0<c<1$$

1. Möglichkeit	Vorgabe verschiedener n-Werte und Berechnung von e auf .... Dezimalstellen nach dem Komma genau
2. Möglichkeit	Vorgabe, daß man e auf z. B. 7 Dezimalstellen genau berechnen soll; mithilfe von R_n lässt sich dann das n bestimmen



3. Beispiel

Ein bekanntes Beispiel sei zum Abschluß kurz (!) dargestellt:

$$F(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,dt = ?$$

Das Integral [„Gaußsches Fehlerintegral"] ist elementar nicht lösbar, also:
Man geht einmal von der MacLaurin Reihe der e-Funktion aus:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots \qquad x_0 = 0$$

und substituiert „formal" $x = -t^2$

$$e^{-t^2} = 1 - \frac{t^2}{1!} + \frac{t^4}{2!} - \frac{t^6}{3!} + \ldots$$

Diese Reihe ist beständig konvergent (!) und darf daher integriert werden!

97

$$F(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,dt$$

!!!

$$= \int_0^x \left(1 - \frac{t^2}{1!} + \frac{t^4}{2!} - \frac{t^6}{3!} \pm \dots\right) dt$$

$$= \left[t - \frac{t^3}{3\cdot 1!} + \frac{t^5}{5\cdot 2!} - \frac{t^7}{7\cdot 3!} \pm \dots\right]_0^x$$

$$= \underbrace{\left[x - \frac{x^3}{3\cdot 1!} + \frac{x^5}{5\cdot 2!} - \frac{x^7}{7\cdot 3!} + \dots\right]}_{\text{obere Grenze „x“}} - \left[\,0\,\right]$$

Die untere Grenze bringt alle Reihenglieder zum Verschwinden