Schnupperkurs: $\boxed{\text{Differentialgleichungen}}$

Wir springen ins kalte Wasser

1. Beispiel)

$$\boxed{y' = x^2}$$

$$y = \frac{1}{3}x^3 + C \quad \text{weil}$$
$$y' = x^2 \; \cancel{\text{weil}}$$

2. Beispiel)

$$\boxed{y' = x \cdot \sin(x)}$$

$$\boxed{y} = \int \underset{v}{x} \cdot \underset{u'}{\sin(x)}$$

$$= \underset{u}{(-\cos x)} \cdot \underset{v}{x} - \int \underbrace{-\cos x}_{u} \cdot \underset{v'}{1}$$

$$= -x\cos x + \int \cos x$$

$$= \boxed{-x\cos x + \sin(x) + C}$$

Da – und nicht nur da! – empfiehlt sich die Probe:

$$\boxed{y(x) = \underset{u}{-x} \cdot \underset{v}{\cos x} + \sin(x) + C}$$

$$y'(x) = -1 \cdot \cos + (-x) \cdot (-\sin x) + \cos(x) + 0$$

$$= \boxed{-\cos x} \boxed{+ x \cdot \sin x} \boxed{+ \cos(x)}$$

$$\boxed{= \underline{\underline{x \cdot \sin x}}}$$

passt!

Zusammenfassung

$$\boxed{\underline{\underline{\text{TYP 1}}} \qquad y' = f(x)}$$

heißt „Differentialgleichung"

- „gewöhnliche" Differentialgleichung
- erste Ordnung

NEU!!!!NEU!
Die schriftlichen Unterlagen zu meinen Videos findet man auf
www.raphael-biere.de

Meine Kanäle auf YOUTUBE:
Mathematik:
https://www.youtube.com/user/Mathematikaufgaben
Latein:
https://www.youtube.com/user/NachhilfeLatein

3\. Beispiel

$$y' = x^4 + \sin(x), \quad \boxed{y(1) = 1}$$

Anfangsbedingung

$$\int y' \, dx = \int (x^4 + \sin x) \, dx$$

$$\boxed{y = \frac{1}{5}x^5 - \cos x + C_1}$$

$y(1) = 1$

$$1 = \frac{1}{5} \cdot 1^5 - \cos 1 + C$$

$$\underline{\underline{C}} = 1 - \frac{1}{5} + \cos 1$$

$$= \underline{\underline{\frac{4}{5} + \cos 1}}$$

$$\mathbb{L} = \left\{ y = f(x) \,\middle|\, y = \frac{1}{5}x^5 - \cos x + \frac{4}{5} + \cos 1 \right\}$$

$\boxed{\text{Typ 2}}$ $\quad y' = \boxed{g(y)}$

1\. Beispiel) $\quad y' = 3y$

$$\frac{dy}{dx} = 3y$$

Wir ordnen:

$$dy = 3y\,dx \quad \Big|\ :y \quad \boxed{y \neq 0!}$$

$$\boxed{\frac{1}{y}\,dy = 3\,dx \quad \Big|\ \int}$$

$$\int \frac{1}{y}\,dy = \boxed{\int 3\,dx}$$

$$\boxed{\ln|y| = \boxed{3x + C}} \quad \Big|\ e^{\text{''}}$$

$$|y| = e^{3x+C} \qquad > 0 !!$$

$$y = e^{3x} \cdot e^{C}$$

$$\boxed{y = \tilde{C} \cdot e^{3x}}$$

Natürlich machen wir die Probe:

$$y = \tilde{C} \cdot e^{3x}$$

$$y' = \underline{\underline{\tilde{C} \cdot \boxed{3} \cdot \boxed{e^{3x}}}}$$

$$\boxed{3y} = \underline{\underline{3 \cdot \tilde{C} \cdot e^{3x}}}$$

also $y' = 3y$ ✓

Was wir – u.a. – bisher so außer Acht gelassen haben:

→ Haben wir wirklich immer <u>alle</u> Lösungen gefunden? (Vielleicht gibts heimlich noch andere?)

→ Kann man das ev. auch „graphisch" lösen / interpretieren?

– Kann man <u>jede</u> DGL durch „Integration" lösen?

– Darf man eigentlich immer integrieren?

TYP 3

$$y' = f(x) \cdot g(y)$$

[Differentialgleichung mit getrennten(!) Veränderlichen]

1. Beispiel

$$y' = e^{y} \cdot \sin(x)$$

Wir rechnen los:

$$\frac{dy}{dx} = e^{y} \cdot \sin(x)$$

Wir „ordnen": TRENNUNG DER VARIABLEN

$$dy = e^{y} \cdot \sin x \cdot dx \quad \Big| : e^{y} \neq 0$$

$$\frac{1}{e^{y}} dy = \sin x \, dx \quad \Big| \int$$

$$\int e^{-y} dy = \int \sin x \, dx$$

$$-e^{-y} = -\cos x + C \quad \big| \cdot (-1)$$

$$e^{-y} = \cos x - C \quad \big| \ln$$

$$-y = \ln(\cos x - c)$$

$$y = -\ln(\cos x - c)$$

$\boxed{\cos x - c > 0}$

Wir lassen einmal die Probe weg und schauen uns diese „Funktionenschar" 'mal mit GEOGEBRA an.

$$y_c(x) = -\ln(\cos x - c)\,,\ \boxed{\cos x - c > 0}$$

NEU!
Die schriftlichen Unterlagen zu meinen Videos findet man auf
www.raphael-biere.de

Meine Kanäle auf YOUTUBE:

Mathematik:
https://www.youtube.com/user/Mathematikaufgaben

Latein:
https://www.youtube.com/user/NachhilfeLatein

2. Beispiel

$$xy' + y = 0 \quad | -y$$

$$xy' = -y \quad | : x \neq 0$$

$$y' = \frac{1}{x} \cdot (-y)$$

$$\left[\quad y' = f(x) \cdot g(y) \right]$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}(-y) \quad | \cdot dx$$

Trennung der Variablen

$$dy = \frac{1}{x}(-y)\,dx \quad | \cdot \left(+\frac{1}{y}\right)$$

$$\frac{1}{y}\,dy = -\frac{1}{x}\,dx \quad | \int$$

$$\ln|y| = -\ln|x| + C_1$$

$$y = \frac{1}{x} \cdot C$$

NEU!!!!NEU!
Die schriftlichen Unterlagen zu meinen Videos findet man auf
www.raphael-biere.de

Meine Kanäle auf YOUTUBE:
Mathematik:
https://www.youtube.com/user/Mathematikaufgaben
Latein:
https://www.youtube.com/user/NachhilfeLatein

$\boxed{\text{Typ 4}}$ $\quad \boxed{y'} = f\left(\frac{y}{x}\right)$

Vorüberlegung $\quad \boxed{\text{Substituiere } z = \frac{y}{x}}$

$$\Leftrightarrow \boxed{y = xz}$$

$$y' = x' \cdot z + x \cdot z'$$

$$\boxed{y' = 1 \cdot z + xz'}$$

damit wird aus $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$

$$\boxed{xz' + z = f(z)}$$

und das lösen wir durch

$\boxed{\text{Trennen der Variablen}}$:

$$\boxed{xz' = f(z) - z} \quad \Big| : \boxed{x \neq 0}$$

$$z' = \frac{1}{x} \cdot \left[f(z) - z\right]$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{x} \cdot \left[f(z) - z\right] \Big| \cdot dx$$

$$dz = \frac{1}{x} \cdot \left[f(z) - z\right] \quad dx \quad \Big|$$

$$\frac{1}{f(z) - z} dz = \frac{1}{x} dx \quad \Big| \int$$

$$\int \frac{1}{f(z) - z} = \ln|x| + \underline{C}$$

Beispiel

$$y' = \frac{y}{x} - \frac{x^2}{y^2}$$

Wir substituieren $u = \frac{y}{x}$

$$\Leftrightarrow u \cdot x = y$$

$$u' \cdot x + u \cdot 1 = y'$$

Damit wird aus der obigen DGL:

$$\underbrace{u' \cdot x + u \cdot 1}_{y'} = u - \frac{1}{u^2} \quad \Big| -u$$

$$u' \cdot x = -\frac{1}{u^2}$$

Trennen der Variablen

$$\frac{du}{dx} x = -\frac{1}{u^2} \quad \Big| \, dx$$

$$x \, du = -\frac{1}{u^2} dx \quad \Big| \cdot u^2$$

$$u^2 x \, du = -dx \quad \Big| : x$$

$$u^2 du = -\frac{1}{x} dx \quad \Big| \int$$

$$\frac{1}{3} u^3 = -\ln|x| + C$$

$$u = \sqrt[3]{3(-\ln|x| + C)}$$

Rücksubstitution

$$u = \frac{y}{x}$$

$$\Leftrightarrow \quad y = x \cdot u$$

also

$$y = x \cdot \sqrt[3]{3(-\ln|x| + C)}$$

NEU!
Die schriftlichen Unterlagen zu meinen Videos findet man auf
www.raphael-biere.de

Meine Kanäle auf YOUTUBE:

Mathematik:
https://www.youtube.com/user/Mathematikaufgaben

Latein:
https://www.youtube.com/user/NachhilfeLatein

Lineare DGL'en der Form

$$\boxed{a(x)\cdot y' + b(x)\cdot y = c(x)}$$

<u>linear:</u> → y, y', y'' (DGL 2. Ordnung) usw
liegen ~~an~~ nur im ersten Grad vor

→ $y \cdot y'$ etwa kommen <u>nicht</u> vor

<u>homogen</u> $c(x) \equiv 0$

<u>inhomogen</u> $c(x) \overset{i.A.}{\neq} 0$

$\boxed{\text{Vorgehensweise}}$

<u>1. Schritt</u> $c(x)$ wird gestrichen

$$a(x)\cdot y' + b(x)\cdot y = C$$

und durch Trennung der Variablen gelöst

<u>2. Schritt</u> Die im ersten Schritt auftauchende Konstante „C" wird als „Funktion" betrachtet; damit wird eine Lösung errechnet....

Beispiel $\boxed{xy' - y = x^2 \cdot \cos x}$

$\boxed{a(x)} \cdot y' + \boxed{b(x)} \cdot y = c(x)$

$a(x) = x$

$b(x) = -1$ [schön einfach!]

$c(x) = x^2 \cdot \cos x$

1. Schritt Wir lösen die zugehörige „homogene" DGL:

$\boxed{xy' - y = 0}$ $\mid +y$ $\boxed{\text{Trennung der Variablen}}$

$xy' = y$

$x \boxed{\frac{dy}{dx}} = y \quad \mid \cdot dx$

$x\,dy = y\,dx \quad \mid : x \mid : y$

$\frac{1}{y}\,dy = \frac{1}{x}\,dx \quad \mid \int$

$\ln|y| = \ln|x| + c$

$\boxed{y = C \cdot x}$

Dieses C wird nun als Funktion angesetzt

$\boxed{\text{„Variation der Konstanten"}}$

$$y(x) = x \cdot C(x) \; !$$

$$\Rightarrow y' = 1 \cdot C(x) + x \cdot C'(x)$$

$$\boxed{xy' - y = x^2 \cdot \cos x}$$ inhomogene DGL

$$x \cdot \underbrace{\left(C(x) + x \cdot C'(x) \right)}_{y'} - x \cdot C(x) = x^2 \cdot \cos x$$

Vereinfache

$$x \cdot C + x^2 C' - x \cdot C = x^2 \cdot \cos x$$

$$x^2 C' = x^2 \cdot \cos x$$

$$C' = \cos x$$

$$C(x) = \sin(x) + C_1$$

$$\boxed{y(x) = x \cdot C(x)}$$ s. (b)

$$y(x) = x \cdot [\sin(x) + C_1]$$

2. Beispiel

$$\boxed{y' + 2y = e^{-x}}$$

$$[\, a(x)\cdot y' + b(x)\cdot y = c(x) \,]$$

$\boxed{a(x) = 1}$

$\boxed{b(x) = 2}$

$\boxed{c(x) = e^{-x}}$

1. Schritt: Lösung der homogenen DGL

$$\boxed{y' + 2y = 0 \quad \text{Trennung der Variablen}}$$

$$y' = -2y$$

$$\frac{dy}{dx} = -2y \quad \Big| \cdot dx$$

$$dy = -2y\,dx \quad \Big| : 2y$$

$$\frac{1}{2y}\,dy = -dx \quad \Big| \int$$

$$\frac{1}{2}\ln|y| = -x + C \quad | \cdot 2$$

$$\ln|y| = -2x + C_1 \quad | \, e^{(\,)}$$

$$y = e^{-2x + C_1} = e^{-2x} \cdot e^{C_1}$$

$$= e^{-2x} \cdot \bar{C}$$

2. Schritt Variation der Konstanten

$$\boxed{y(x) = e^{-2x} \boxed{\cdot} \bar{C}(x)}$$

$$\boxed{y'(x) = -2e^{-2x} \cdot \bar{C}(x) + e^{-2x} \cdot \bar{C}'(x)}$$

DGl inhomogen:

$\boxed{y' + 2y = e^{-x} \quad \text{Obiges Einsetzen}}$

$$\underbrace{-2e^{-2x} \cdot \bar{C}(x) + \boxed{e^{-2x} \cdot \bar{C}'(x)}}_{y'} + 2\underbrace{e^{-2x} \cdot \bar{C}(x)}_{y} = e^{-x}$$

$$e^{-2x} \cdot c'(x) = e^{-x} \quad \Big| : e^{-2x}$$

$$c'(x) = \frac{e^{-x}}{e^{-2x}} = e^{x} \Big|$$

$$\frac{dc}{dx} = e^{x} \quad \Big| dx$$

$$dc = e^{x} dx \, \Big| \int$$

$$\bar{C} = e^{x} + \tilde{C}$$

also

$$\boxed{y = e^{-2x} \cdot \bar{C}(x)} = \boxed{e^{-2x} \cdot \left[e^{x} + \tilde{C}\right]}$$

16

TYP 6 Bernoullische DGL:

$$\boxed{a(x)\cdot y' + b(x)\cdot y = c\cdot x} \cdot \boxed{y^n}$$

neu!!

Vorgehensweise

1. Schritt: Durch „gescheite Substitution" macht man aus der Bernoulli-DGL eine inhomogene DGL.

2. Schritt: Man löst die inhomogene DGL wie jetzt durch Variation der Konstanten;

auf gehts!

Beispiel $\boxed{xy' + 2y - xy^2 = 0}$

$$\Leftrightarrow \boxed{xy' + 2y = x \cdot y^2}$$

$$\left[a(x) \cdot y' + b(x) \cdot y = c(x) \cdot y^n \right]$$

$$\boxed{\begin{aligned} &a(x) = x \\ &b(x) = 2 \\ &c(x) = x \\ &y^n = y^2 \text{ d.h. } n = 2 \end{aligned}}$$

Wir formen um: $\quad xy' + 2y = xy^2 \quad | : y^2$

$$\Leftrightarrow \frac{xy'}{y^2} + \frac{2}{y} = x$$

Wir substituieren $\boxed{z = \frac{1}{y} \text{ bzw } \boxed{\boxed{y = \frac{1}{z}}}}$

und aus $\quad y \cdot z = 1 \Rightarrow y'z + yz' = 0$

$$\Leftrightarrow y'z = -yz'$$

$$\Leftrightarrow y' = -y \cdot \frac{z'}{z}$$

$$\Leftrightarrow y' = -\frac{1 \cdot z'}{z z}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\boxed{y' = -\frac{z'}{z^2}}}$$

und aus $xy' + 2y - xy^2 = 0$ wird

$$x\cdot\left(-\frac{z'}{z^2}\right) + 2\cdot\frac{1}{z} - x\cdot\left(\frac{1}{z}\right)^2 = 0 \quad \Big|\ \text{vereinfachen}$$

$$\frac{-xz'}{z^2} + \frac{2}{z} - \frac{x}{z^2} = 0 \quad \Big|\ \cdot z^2$$

$$-xz' + 2z - x = 0$$ bzw

$$\boxed{-xz' + 2z = x}$$

lineare [inhomogene] DGL

Wir lösen die homogene DGL:

$$-xz' + 2z = 0$$

$$-xz' = -2z$$

$$x\frac{dz}{dx} = 2z \quad \Big|$$ Trennung der Variablen

$$x\,dz = 2z\,dx \quad \Big|\ :2z \quad \Big|\ :x$$

$$\frac{1}{2z}\,dz = \frac{1}{x}\,dx$$

$$\frac{1}{z}\,dz = \frac{2}{x}\,dx \quad \Big|\ \int$$

$$\ln|z| = 2\ln|x| + C_1$$

$$z(x) = C\cdot x^2$$

15

Variation der Konstanten

$$\boxed{z(x) = C(x) \cdot x^2}$$

$$z'(x) = C'(x) \cdot x^2 + C(x) \cdot 2x$$

inhomogene DGL: $\boxed{-x z' + 2z = x}$

Einsetzen liefert

$$-x\left[\boxed{C'(x) \cdot x^2 + C(x) \cdot 2x}\right] + 2 \cdot \boxed{C(x) \cdot x^2} = x$$

$$-C'(x) \cdot x^3 \cancel{- 2x^2 \cdot C(x)} \cancel{+ 2x^2 \cdot C(x)} = x \quad |:x$$

$$-C'(x) \cdot x^2 = 1$$

$$-C'(x) = \frac{1}{x^2}$$

$$C(x) = \int -\frac{1}{x^2}\,dx = +\frac{1}{x} + C_1$$

$$\boxed{z(x) = x^2 \cdot \left(\boxed{+\frac{1}{x} + C_1}\right)}$$

$$= +x + C_1 x^2 = x + C_1 x^2$$

Rücksubstitution:

$$\boxed{y(x) = \frac{1}{z}}$$

$$\boxed{= \frac{1}{c_1 x^2 + x}}$$

NEU!
Die schriftlichen Unterlagen zu meinen Videos findet man auf
www.raphael-biere.de

Meine Kanäle auf YOUTUBE:

Mathematik:
https://www.youtube.com/user/Mathematikaufgaben

Latein:
https://www.youtube.com/user/NachhilfeLatein

Was man noch machen könnte:

→ Clairautsche DGL: $\boxed{y = xy' + f(y')}$

schwierig, weil es u.a. um „Einhüllende" einer Geradenschar geht!

→ Jacobische DGL: $\boxed{y' = f\left(\frac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+\gamma}\right)}$

lässt sich mit – großem – Rechenaufwand auf eine DGL von Bernoulli (Typ 6) zurückführen

→ Riccatische DGL: $\boxed{y' = f(x)\cdot y^2 + g(x)\cdot y + h(x)}$

lässt sich ebenfalls – unter gewissen Voraussetzungen – auf eine DGL von Bernoulli zurückführen.

→ Systeme von DGL'en

→ DGL'en von Funktionen mit mehreren Veränderlichen

Linienelement – Richtungsfeld – grafische Lösung

Eine gewöhnliche DGL 1. Ordnung

$$F(x,y,y')=0$$

lässt sich oft – leider nicht immer – nach y' hin auflösen

$$\boxed{y'=f(x,y)}$$

d.h.

zu jedem Zahlenpaar (Punkt) $\boxed{(x|y)}$ gibt es eine Steigung y'.

Ein Zahlentripel der Form (x,y,y') heißt Linienelement.

Alle Linienelemente zusammen heißen Richtungsfeld.

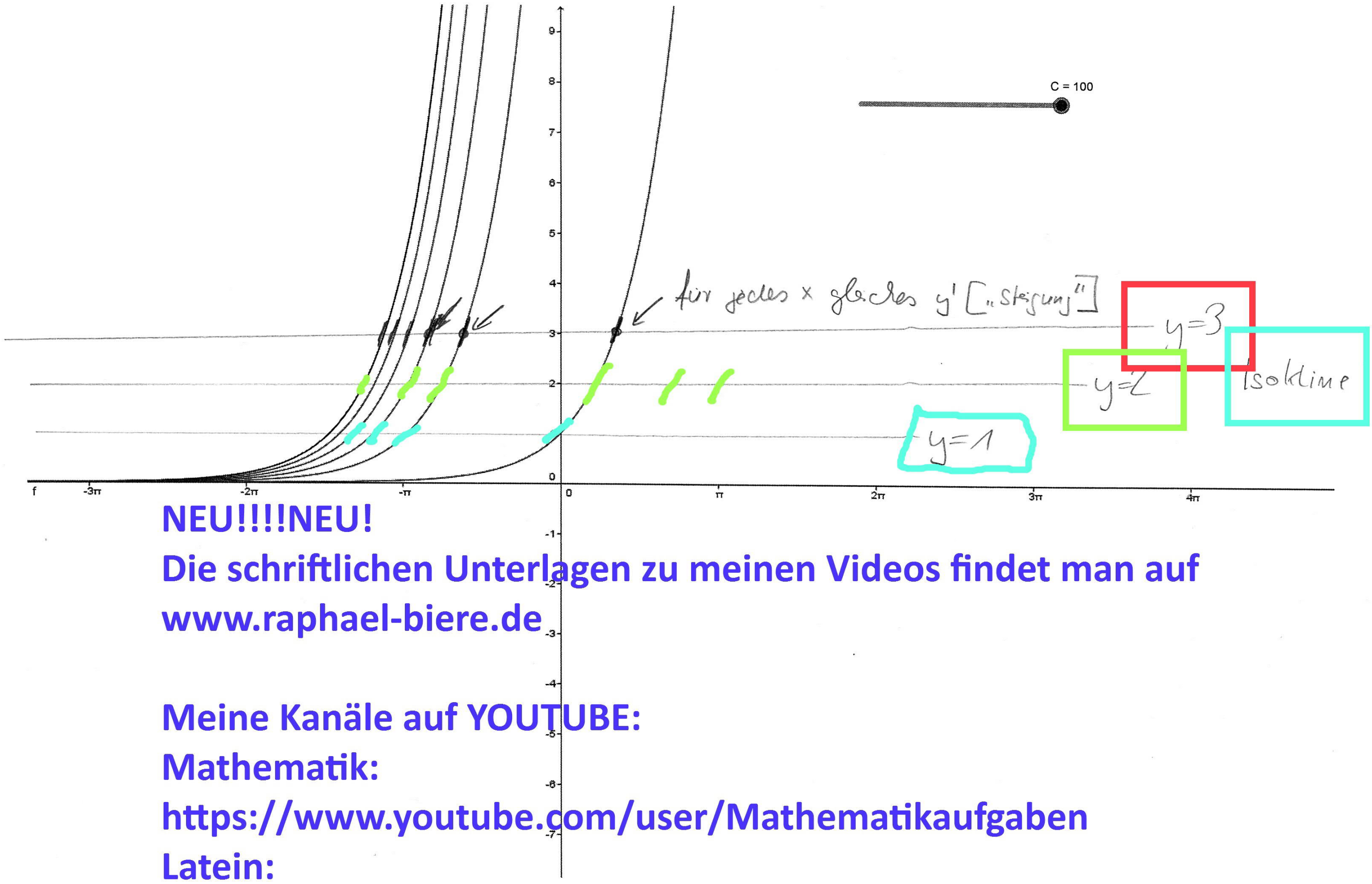
Beispiel | $y' = y$

Gibt man für y verschiedene Zahlen vor – z. B. $y=1$; $y=2$ –, so ist $y'=1$; $y'=2$ unabhängig von x-Werten.

Grafik

→ Die waagerechten Linien, längs der y' – also die Steigung – konstant ist, nennt man ISOKLINEN.

→ Die Lösungskurve y muß „in dieses Richtungsfeld" hineinpassen:
die Lösung obiger DGL ist $y(x) = C \cdot e^x$ und die Graphen dazu „passen".



NEU!!!!NEU!
Die schriftlichen Unterlagen zu meinen Videos findet man auf www.raphael-biere.de

Meine Kanäle auf YOUTUBE:
Mathematik:
https://www.youtube.com/user/Mathematikaufgaben
Latein:
https://www.youtube.com/user/NachhilfeLatein