zu a) $f_k(x) = \frac{k^2x^2-3}{x^3}$

mit Geogebra

zu b) b1) $\boxed{D(f_k) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}}$

b2) $\boxed{f_k(x) = 0} \Leftrightarrow \boxed{k^2x^2 - 3 = 0}$

$\Leftrightarrow x^2 = \frac{3}{k^2}$ $\quad k \neq 0$

$\Leftrightarrow x_1 = \frac{1}{k}\sqrt{3}$

$x_2 = -\frac{1}{k}\sqrt{3}$

Die Nullstellen sind von k abhängig!

keine Nullstellen für k=0!!!!

b3) Symmetrie

$f_k(x) = f_k(-x)$ $\boxed{\text{y-achsensymm}}$

$f_k(-x) = -f_k(x)$ $\boxed{\text{nullpunktsymm.}}$

$$\boxed{f_k(-x)} = \frac{k^2 \cdot (-x)^2 - 3}{(-x)^3}$$

$$= \boxed{\frac{k^2x^2 - 3}{-x^3}}$$

$$\boxed{-f_k(x)} = -\frac{k^2x^2 - 3}{x^3}$$

$$= \boxed{\frac{k^2x^2 - 3}{-x^3}}$$

$\boxed{f_k(-x) = -f_k(x) : \text{nullpunktsymm.}}$

NEU!!!!NEU!
Die schriftlichen Unterlagen zu meinen Videos findet man auf
www.raphael-biere.de

Meine Kanäle auf YOUTUBE:
Mathematik:
https://www.youtube.com/user/Mathematikaufgaben
Latein:
https://www.youtube.com/user/NachhilfeLatein

b4) Da es sich um eine gebrochen-rationale Funktion handelt, untersucht man

① $\lim\limits_{x \to +\infty} l_4$

② $\lim\limits_{x \to -\infty} l_4$

③ $\lim l_4$

$\boxed{\text{„Nennernullstellen}^{\pm}\text{"}}$

$\boxed{1}$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{k^2x^2-3}{x^3}$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \boxed{\frac{k^2}{x}} - \boxed{\frac{3}{x^3}}$

$= 0$ [„von oben"], weil – für riesengroße x-Werte – $\frac{3}{x^3}$ ziemlich schnell klein wird, schneller als $\frac{k^2}{x}$

⑤

[2] $\lim\limits_{x \to -\infty} f_4(x) = 0$ [„von unten"]

mit analoger Begründung: $\frac{4^2}{x}$ ist dann negativ, strebt gegen 0 und $-\frac{3}{x^3}$ ist ein positiver Anteil, der nicht mehr zu berücksichtigen ist.

[3] $\boxed{\text{Nennernullstelle ist } x=0}$

$$\lim_{x \to 0^+} f_4(x) = \lim_{x \to 0^+} \left[\frac{4}{x} - \frac{3}{x^3}\right]$$

$$= -\infty$$

$$\lim_{x \to 0^-} f_4(x) = \lim_{x \to 0^-} \left[\frac{4}{x} - \frac{3}{x^3}\right]$$

$$= +\infty$$

C Berechnung der Ableitungen mit „sinnvolle" Zusammenfassung

$$f_k(x) = \frac{k^2x^2-3}{x^3} \stackrel{!}{=} \frac{k^2}{x} - \frac{3}{x^3}$$

$$\stackrel{!}{=} k^2 \cdot x^{-1} - 3 \cdot x^{-3}$$

$$f_k'(x) = -k^2 \cdot x^{-2} + 9x^{-4}$$

$$f_k''(x) = 2k^2 \cdot x^{-3} - 36x^{-5}$$

$$f_k'''(x) = -6k^2x^{-4} + 180x^{-6}$$

oder

$$f_k'(x) = \frac{-k^2}{x^2} + \frac{9}{x^4} \quad ✓$$

$$f_k''(x) = \frac{2k^2}{x^3} - \frac{36}{x^5} \quad ✓$$

$$f_k'''(x) = \frac{-6k^2}{x^4} + \frac{180}{x^6} \quad ✓$$

d) Extrema

notw. Bed: $f'(x)=0$

$$\boxed{f_k'(x)=0=-\frac{k^2}{x^2}+\frac{9}{x^4}} \quad \Big| \cdot x^4$$

$$0=-k^2x^2+9$$

$k \neq 0!$

$$x^2=\frac{9}{k^2}$$

$$x_1=\frac{3}{k} \qquad x_2=-\frac{3}{k}$$

$\boxed{\text{hinr. Bed. } f'(x)=0 \wedge f''(x)\neq 0}$

$$f_k''\left(\frac{3}{k}\right)=\frac{2k^2}{\left(\frac{3}{k}\right)^3}-\frac{36}{\left(\frac{3}{k}\right)^5}=\frac{2k^2\cdot k^3}{3^3}-\frac{36\cdot k^5}{3^5}$$

$$=\frac{2\cdot 3^2\cdot k^5-36k^5}{3^5}=\frac{-18k^5}{3^5}$$

$$=\frac{-2k^5}{27} \begin{array}{l} <0 \text{ für } k>0 \\ >0 \text{ für } k<0 \end{array}$$

Aus „Symmetriegründen" kann man sich $\left(-\frac{3}{k}\right)$ ersparen

8

(c) Wendepunkte

notw. Krit. $f''(x)=0$

$$f_k''(x)=0=\frac{2k^2}{x^3}-\frac{36}{x^5}$$

$$0=\frac{2x^2k^2-36}{x^5} \quad |\cdot x^5$$

$$2x^2k^2=36$$

$$x^2=\frac{18}{k^2}$$

$$x_1=+\frac{1}{k}\sqrt{18}$$

$$x_2=-\frac{1}{k}\sqrt{18}$$

Und den Nachweis, dass an diesen Stellen $f_k'''(x)\neq 0$ ist, führen wir so:

$$f_k'''(x)=\frac{-6x^2k^2+180}{x^6}\overset{!!?}{=}0$$

$$6x^2k^2=180$$

$$x^2=\frac{30}{k^2}$$

$$x_{1/2}=\frac{1}{k}\sqrt{30} \quad \text{q.e.d.}$$

(9)

1) Wo liegen die Tiefpunkte der Schar?

$$f_k'(x) = 0 \Longleftrightarrow \boxed{0 = -\frac{k^2}{x^2} + \frac{9}{x^4}}$$

→ Wir lösen diese Gleichung nach k (!!) hin auf: ...

$$\frac{k^2}{x^2} = \frac{9}{x^4} \Longleftrightarrow k^2 = \frac{9}{x^2}$$

→ ...und setzen das i.d. Ausgangsgleichung ein

$$f_{k^2=\frac{9}{x^2}}(x) = \frac{\left[\frac{9}{x^2}\right] \cdot x^2 - 3}{x^3}$$

$$= \frac{9-3}{x^3} = \frac{6}{x^3}$$

→ ...und das schauen wir 10 uns in GEOGEBRA

⑨ $\int \left[\frac{k^2 x^2}{x^3} - \frac{3}{x^3} \right] dx$

$= k^2 \int \frac{1}{x} dx - 3 \int \frac{1}{x^3} dx$

$= k^2 \cdot \ln|x| - 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot x^{-2} + C$

$= k^2 \cdot \ln|x| + \frac{3}{2x^2} + C$ ✓

NEU!!!!NEU!
Die schriftlichen Unterlagen zu meinen Videos findet man auf
www.raphael-biere.de

Meine Kanäle auf YOUTUBE:
Mathematik:
https://www.youtube.com/user/Mathematikaufgaben
Latein:
https://www.youtube.com/user/NachhilfeLatein

(k) $\int_{n}^{\infty} l_k(x)\,dx$

$$= \lim_{\substack{z \to \infty \\ \boxed{z > n}}} \int_{n}^{z} l_k(x)\,dx$$

1. Schritt $\int_{n}^{z} l_k(x)\,dx$

$$= \boxed{\left[k^2 \cdot \ln x + \frac{3}{2x^2}\right]_n^z}$$

$$= \boxed{k^2 \cdot \ln z + \frac{3}{2z^2}} - \boxed{\left[k^2 \cdot \ln n + \frac{3}{2n^2}\right]}$$

NEU!!!!NEU!
Die schriftlichen Unterlagen zu meinen Videos findet man auf
www.raphael-biere.de

Meine Kanäle auf YOUTUBE:
Mathematik:
https://www.youtube.com/user/Mathematikaufgaben
Latein:
https://www.youtube.com/user/NachhilfeLatein

$$= k^2 \ln z + \frac{3}{2z^2} \underbrace{- k^2 \ln 1 - \frac{3}{2 \cdot 1^2}}_{\text{nicht von } z \text{ abhängig!}}$$

nun ist

$$\lim_{z \to \infty} \frac{3}{2z^2} = 0 \quad \text{aber}$$

$$\lim_{z \to \infty} k^2 \cdot \ln z = \infty \quad \text{also}$$

existiert das uneigentliche Integral nicht!

NEU!!!!NEU!
Die schriftlichen Unterlagen zu meinen Videos findet man auf
www.raphael-biere.de

Meine Kanäle auf YOUTUBE:
Mathematik:
https://www.youtube.com/user/Mathematikaufgaben
Latein:
https://www.youtube.com/user/NachhilfeLatein