431 Lehrgang gebrochen-rationale Funktionen

(750)

Beispiele

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2-3x+5} \qquad g(x) = \frac{-2}{x} \qquad h(x) = \frac{1}{4}x - \frac{1}{x}$$

$$k(x) = \frac{1-3x^2+x^9}{x^{17}-24}$$

allgemein

$$f(x) \mathrel{\hat=} \frac{\text{„Zählerpolynom"}}{\text{„Nennerpolynom"}}$$

Definitionsbereich

Gilt „Nennerpolynom $= 0$", so hat die gebrochen-rationale Funktion dort eine „Definitionslücke".

Beispiel

$$f(x) = \frac{1}{x^2-4}$$

$$x^2 - 4 \stackrel{?}{=} 0 \iff$$
$$x^2 = 4 \iff$$
$$x_1 = +2 \quad x_2 = -2$$

also $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-2; +2\}$

Beispiel

$$f(x) = \frac{x}{x^2+5}$$

$$x^2 + 5 \stackrel{?}{=} 0 \quad | -5$$
$$x^2 = -5 \quad | \sqrt{}$$

$$\boxed{D(f) = \mathbb{R}}$$

Nullstellen

Wie eine ganz-rationale Funktion kann auch eine gebrochen-rationale Funktion Nullstellen, also Schnittstellen mit der x-Achse haben.

Beispiel $f(x) = \frac{x-3}{x^2+1}$ Es ist $D(f) = \mathbb{R}$

$\boxed{f(x) = 0} \Leftrightarrow x - 3 = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x = 3}}$ ✓

Beispiel $f(x) = \frac{x^2-12}{x+4}$ $\boxed{D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-4\}}$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 12 = 0 \quad | +12$

$x^2 = 12$

$x_1 = \sqrt{12} = +2\sqrt{3}$

$x_2 = -\sqrt{12} = -2\sqrt{3}$

Beispiel $f(x) = \frac{x^2-25}{x^3-125}$ $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{5\}$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 25 = 0 \quad | +25$

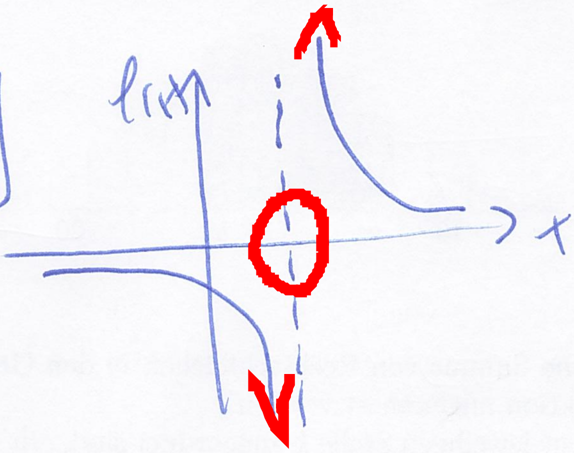
$x^2 = 25$

$\cancel{x_1 = +5}$ $\underline{\underline{x_2 = -5}}$

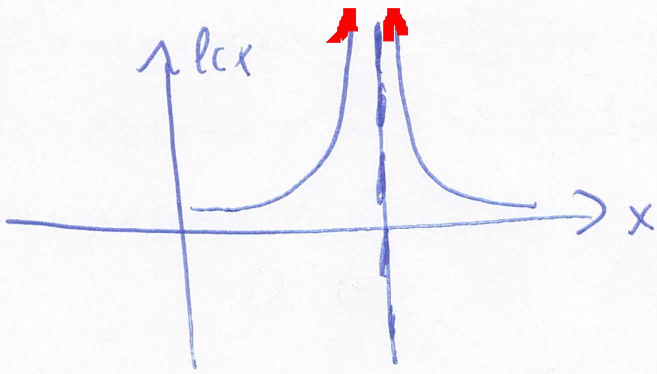
Verhalten in der Umgebung einer Definitionslücke

Wir betrachten folgende Fälle:

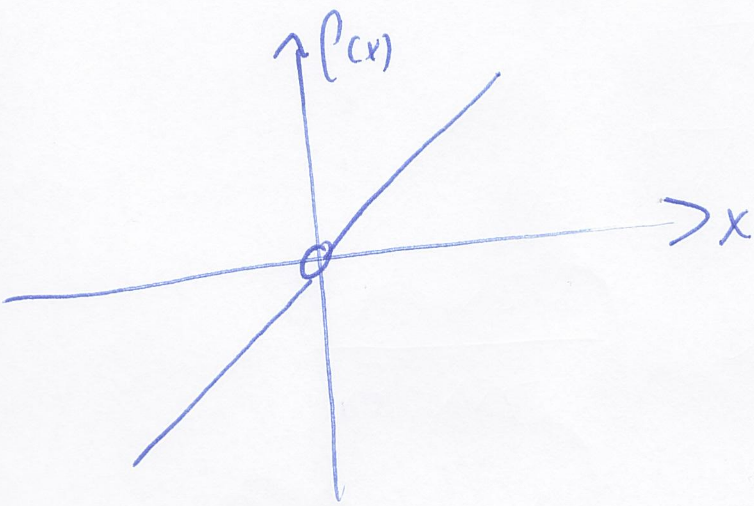
Fall 1



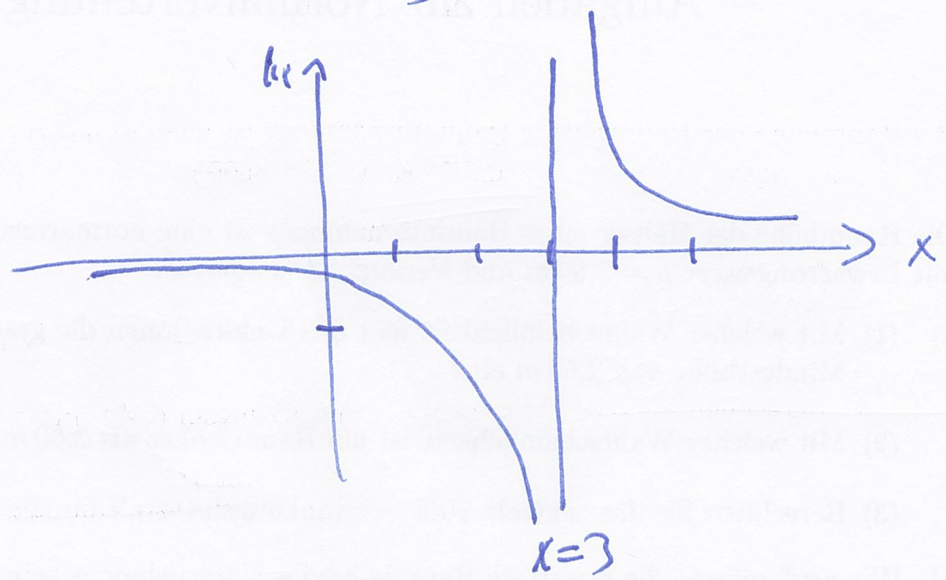
Fall 2



Fall 3



$\boxed{\text{zu Fall 1}}$ $f(x) = \dfrac{1}{x-3}$



Polstelle mit Vorzeichenwechsel, weil

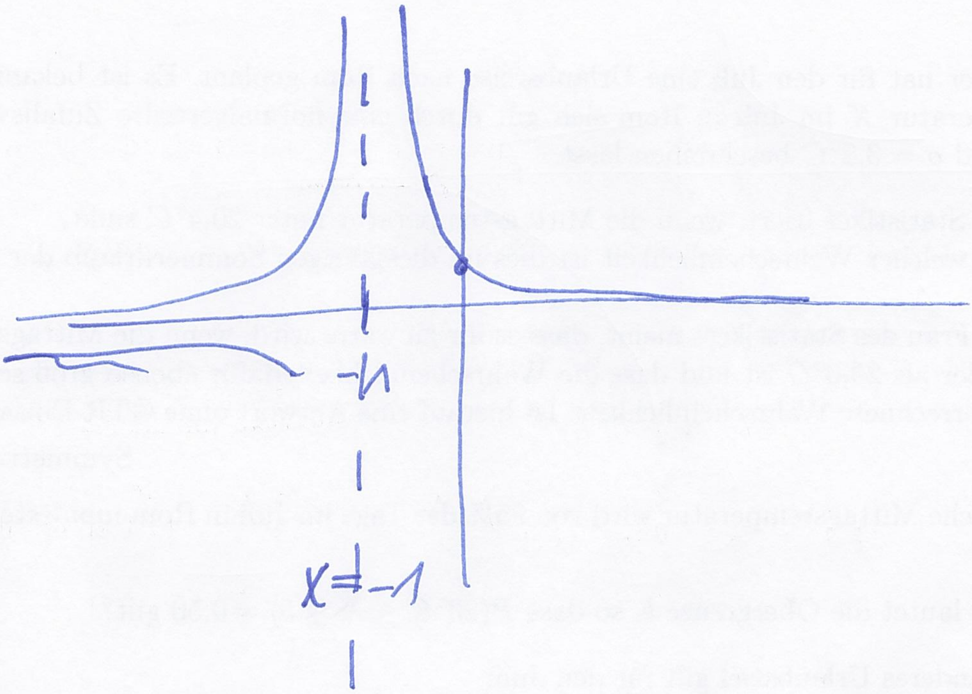
$\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = +\infty$ und $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = -\infty$

Überprüft per Grafik | Tabelle

Die Gerade mit der Gleichung $x=3$ heißt senkrechte Asymptote [des Graphen von f]

24 Fall 2

$$f(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$$



Polstelle <u>ohne</u> Vorzeichenwechsel:

$\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = +\infty$

Die Gerade mit der Gleichung $x=-1$

heißt <u>senkrechte Asymptote</u> [des Graphen] zu Fall 3 $\quad f(x)=\frac{x^2-3x}{x-3} \qquad D(f)=\mathbb{R}\setminus\{+3\}$

Die Stelle „$x=3$" ist **keine** Polstelle!

$x=3$ ist **keine** Asymptote, denn

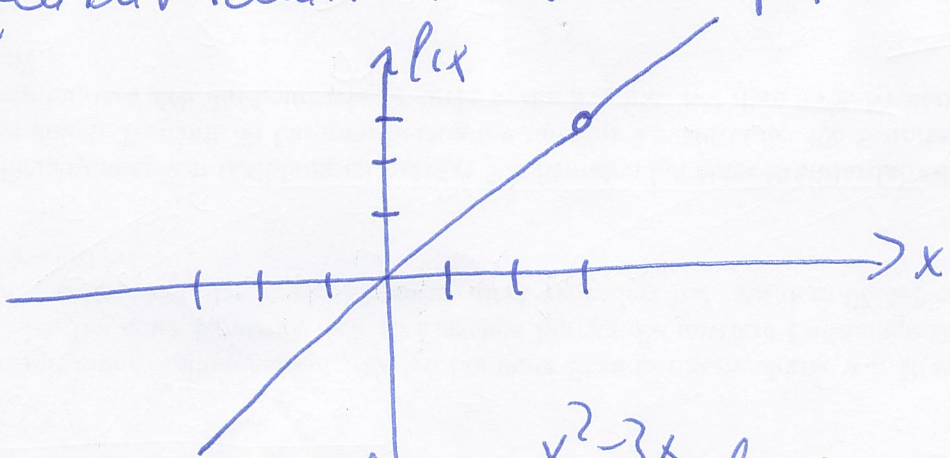
$$f(x)=\frac{x^2-3x}{x-3}$$

$$=\frac{x\cdot(x-3)}{x-3} \qquad x\neq 3$$

$$\overset{x\neq 3}{=} \frac{x\cdot 1}{1}$$

$$=x$$

Der Graph von $f(x)=\frac{x^2-3x}{x-3}$ ist für $x\neq 3$ offenbar identisch mit dem Graphen von $f(x)=x$



Der Graph von $f(x)=\frac{x^2-3x}{x-3}$ hat an der Stelle $x=3$ eine „hebbare" Definitionslücke.

„hebbar" Bedeutet:

Erweitert man die Definition von $f(x)$ wie folgt:

$$f_{neu}(x) = \begin{cases} \frac{x^2-3x}{x-3} & x \neq 3 \\ 3 & x = 3 \end{cases}$$

so hat man eine „neue" Funktion, die überall stetig ist. Die Unstetigkeit der „alten" Funktion an der „Lochstelle" $x=3$ wurde behoben.