Waagrechte Asymptoten, „schiefe" Asymptoten und Näherungsfunktionen (434)

Ich wähle folgende „Dreiteilung" [Man kann auch 4x]

(A) $f(x) = \frac{2x - x^2}{4 + x^3 - 7x}$

Der Grad des Nennerpolynoms ist echt größer [x^3] als der Grad des Zählerpolynoms [$-x^2$]

(B) $f(x) = \frac{3 - 7x}{5x + 2}$

Der Grad des Zählerpolynoms und der Grad des Nennerpolynoms sind identisch.

(C) $f(x) = \frac{x^3 - 5x^2 + 2}{x - 5}$

Der Grad des Zählerpolynoms ist echt größer als der Grad des Nennerpolynoms

(A) $f(x) = \dfrac{2x - x^2}{4 + x^3 - 7x}$

Hier gilt stets: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$, also ist die x-Achse Asymptote.

<u>Erklärung</u> Erweitert man den Bruch mit „dem Kehrwert der höchsten Potenz von x":

$$\frac{(2x - x^2) \cdot \frac{1}{x^3}}{(4 + x^3 - 7x) \cdot \frac{1}{x^3}} = \frac{\frac{2}{x^2} - \frac{1}{x}}{\frac{4}{x^3} + 1 - \frac{7}{x^2}}$$

$\Uparrow$

so gilt für den Grenzwert:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{\frac{2}{x^2} - \frac{1}{x}}{\frac{4}{x^3} + 1 - \frac{7}{x^2}} \stackrel{!}{=} \frac{0 - 0}{0 + 1 - 0} = 0$$

Dieses Verfahren ist immer anwendbar im Fall (A).

(B) $f(x) = \dfrac{3-7x}{9x+2}$

Erweiterung – wie bei (A) – mit dem „Kehrwert der höchsten Potenz von x" ergibt

$$\frac{3-7x}{9x+2} \cdot \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \frac{(3-7x)\cdot\frac{1}{x}}{(9x+2)\cdot\frac{1}{x}} = \frac{\frac{3}{x}-7}{9+\frac{2}{x}}$$

und es folgt wie

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{3-7x}{9x+2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{3}{x}-7}{9+\frac{2}{x}} = \frac{0-7}{9+\frac{2}{x}} = -\frac{7}{9}$$

$y = -\frac{7}{9}$ [Parallele zur x-Achse durch $(0|-\frac{7}{9})$]

ist Asymptote.

(c) Ist das Zählerpolynom von größerem Grad als das Nennerpolynom, führt man meist stets eine Polynomdivision durch:

$$f(x) = \frac{x^3 - 5x^2 + 2}{x - 5}$$

$$= [x^3 - 5x^2 + 2] : [x - 5] = x^2 + \frac{2}{x-5}$$

$$\frac{-(x^3 - 5x^2)}{0 \quad 0 + 2}$$

Näherungsfunktion oder Näherungskurve $g(x) = x^2$

Bem: Ist im Fall (c) der „Unterschied zwischen $\text{Grad}_{\text{Zählerpol.}}$ und $\text{Grad}_{\text{Nennerpol}}$ „nur 1", so ist die „Näherungsfunktion" eine ~~Asymptote~~ „schiefe" Asymptote

Beispiel $f(x) = \dfrac{x^3 - 5x^2 + 2}{2x^2 - x}$

$$f(x) = \frac{x^3 - 5x^2 + 2}{2x^2 - x}$$

$$= \left[x^3 - 5x^2 + 2\right] : \left[2x^2 - x\right] = \underbrace{\frac{1}{2}x - 2{,}25}_{\text{„schiefe Asymptote"}} + \frac{-2{,}25x + 2}{2x^2 - x}$$

$$\begin{array}{l} -\left(x^3 - \frac{1}{2}x^2\right) \\ \hline 0 \quad -4{,}5x^2 + 2 \\ \quad -\left(-4{,}5x^2 + 2{,}25x\right) \\ \hline \quad 0 \quad -2{,}25x + 2 \end{array}$$

Übungen

$f_1(x)=\frac{2x-2}{x^2+9}$ $f_2(x)=\frac{x}{x-3}$ $f_3(x)=\frac{x^2+9}{x+2}$ 435

$f_4(x)=\frac{2x^3-4x^2-x+6}{4x^2+3}$ $f_5(x)=\frac{x^5-3x^3+2}{2x^3-x}$

$f_t(x)=\frac{2x^2-(2t+1)x}{x-t}$

Untersuche auf

a) Nullstellen

b) $D(f)$

c) Polstelle mit/ohne Vorzeichenwechsel

d) hebbare Lücken

e) waagrechte Asymptoten/schiefe Asymptote/Näherungsfunktion

f) Grafik mit Geogebra

Ausblick Lösungen/Kurvendiskussionen/Parameteraufgaben/ ~~Ableitungen~~