435

$$f_1(x) = \frac{2x-2}{x^2+5}$$

Nullstellen $f(x)=0 \Leftrightarrow 2x-2=0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x=1}}$

Definitionsb.: $N(x) \neq 0$! Wo ist $x^2+5 \stackrel{?}{=} 0 \Leftrightarrow x^2=-5$ ↯ $D(f)=\mathbb{R}$

Polstelle liegen nicht vor wg $D(f)=\mathbb{R}$

hebb. Lücke liegen nicht vor

„Asymptote": Es ist Grad$(2x-2)=1$ Grad$(x^2+5)=2$

Die x-Achse ist Asymptote

Graph: GEOGEBRA

$$f_2(x) = \frac{x}{x-3}$$

Nullstelle $f(x)=0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x=0}}$

$D(f_2)$ $x-3=0 \Leftrightarrow x=3$ $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{+3\}$

Polstelle Wir betrachten $x=3$

Es ist $\lim_{x \to 3^+} f_2(x) = \lim_{x \to 3^+} \frac{x}{x-3} = +\infty$ weil Zähler und

Nenner jeweils positive Werte liefern

Es ist $\lim_{x \to 3^-} f_2(x) = \lim_{x \to 3^-} \frac{\overset{x>0}{x}}{\underbrace{x-3}_{<0}} = -\infty$

hebb. Lücke nicht vorhanden

„Asymptote“ $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x}{x-3}$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x \cdot \frac{1}{x}}{(x-3) \cdot \frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{1 - \frac{3}{x}}$$

$$= \underline{\underline{1}}$$

$y=1$ ist „waagerechte Asymptote“

Grafik GEOGEBRA

$$f_3(x) = \frac{x^2+9}{x+2}$$

Nullstellen: $f_3(x) = 0 \Leftrightarrow x^2+9=0$ ↯ keine Nullstelle

D(f) Ansatz: $x+2 \stackrel{?}{=} 0$

$x = -2 \quad D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

Polstelle An der Stelle $x=-2$

$$f(-2+h) = \frac{(-2+h)^2+9}{-2+h+2}$$

$$= \frac{4-4h+h^2+9}{h}$$

$$= \frac{h^2-4h+13}{h}$$

$$= h - 4 + \frac{13}{h} \xrightarrow{\text{für } h \to 0} +\infty$$

$$f(-2-h) = \frac{4+4h+h^2+9}{-2-h+2}$$

$$= \frac{h^2+4h+13}{-h}$$

$$= -h - 4 - \frac{13}{h} \xrightarrow{h \to 0} -\infty$$

hebl. Lücke liegt nicht vor weil „Polstelle ohne Vorzeichen"

„Asymptote" Grad $(Z(x)) = 2\,[x^2]$ Grad $(N(x)) = 1\,[x]$

Polynomd. $(x^2+9):(x+2) = x-2+\frac{13}{x+2}$

$-(x^2+2x)$

$0-2x+9$

$-(-2x-4)$

$\underline{y = x-2}$ ist Asympt.

$$f_4(x) = \frac{2x^3-4x^2-x+6}{4x^2+3}$$ 439

**Nullstellen** $f_4(x)=0 \Longleftrightarrow 2x^3-4x^2-x+6=0$

① 3. Grades: ausklammern geht nicht

: raten $x=\pm 1$ $x=\pm 2$ $x=\pm 3$ ergibt keine Nullstellen

Erst einmal keine Möglichkeit der Nullstellen-bestimmung

**D(f)** Wo ist $N(x)=0 \Leftrightarrow 4x^2+3=0$ ↯ $D(f)=\mathbb{R}$

**Polstellen** keine

**hebb. Lücken** keine

**"Asymptoten"** $Z_{Grad} \hat{=} 3x^{3}$ $N_{Grad} \hat{=} 4x^{2}$ also

Polynomdivision

$$\boxed{2x^3-4x^2-x+6} : [4x^2+3] = \underbrace{\tfrac{1}{2}x-1}_{} + \frac{-1,5x+3}{4x^2+3}$$

$$-(2x^3+1,5x)$$

$$-4x^2-1,5x$$

$$-(-4x^2-3)$$

$$-1,5x+3$$

$y=\frac{1}{2}x-1$ ist [schräge] Asymptote

**Grafik 4**

$$f_5(x) = \frac{x^5 - 3x^3 + 2}{2x^3 - x}$$

~~438~~ 440

<u>Nullstellen</u> $f(x) = 0 \Longleftrightarrow x^5 - 3x^3 + 2 = 0$

Raten $x = 1$

$f_5(1) = 0$

<u>Polynomdivision</u>

$$
\begin{array}{l}
(x^5 - 3x^3 + 2) : (x - 1) = x^4 + x^3 - 2x^2 - 2x - 2 \\
-(x^5 - x^4) \\
\quad x^4 - 3x^3 \\
\quad -(x^4 - x^3) \\
\qquad -2x^3 + 2 \\
\qquad (-2x^3 + 2x^2) \\
\qquad\quad -2x^2 + 2 \\
\qquad\quad -(-2x^2 + 2x) \\
\qquad\qquad -2x + 2 \\
\qquad\qquad (-2x + 2) \\
\qquad\qquad\quad \underline{\underline{0}}
\end{array}
$$

Restpolynom $r(x) = x^4 + x^3 - 2x^2 - 2x - 2$

Raten

$r(1) = 1 + 1 - 2 - 2 - 2 \neq 0$

$r(-1) = 1 - 1 - 2 + 2 - 2 \neq 0$

$r(\pm 2)$ und $r(\pm 3)$ liefern ebenfalls keine

weiteren Nullstellen

D(f) Wo ist $N(x)=0$? $\Leftrightarrow 2x^3 - x = 0$

$$x(2x^2-1)=0$$

$$x_1 = 0 \quad 2x^2-1=0$$

$$x_2 = +\sqrt{\tfrac{1}{2}}$$

$$x_3 = -\sqrt{\tfrac{1}{2}}$$

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \left\{0;\ +\sqrt{\tfrac{1}{2}};\ -\sqrt{\tfrac{1}{2}}\right\}$$

Polstelle Wir betrachten den Graphen von $f_5(x)$ und den nicht definierten Stellen und „sehen“

$\lim_{x \to 0^+} f_5(x) = -\infty$ $\lim_{x \to 0^-} f_5(x) = -\infty$

Polstelle mit Vorzeichenwechsel und analog an den Stellen $x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$

[Berechnung etwa über $\lim_{x \to 0^+} f_5(x)$ bzw $\lim_{x \to 0^-} f_5(x)$ ]

hebbare Lücken liegen nicht vor

„Asymptote" Wir führen eine Polynomdivision durch

$$(x^5-3x^3+2):(2x^3-x) = \cancel{2{,}5x^2}$$
$$= \frac{1}{2}x^2 - 1{,}25 + R$$

$$-\left(x^5 - \frac{1}{2}x^3\right)$$

$$0 \quad -2\frac{1}{2}x^3 + 2$$

$$-\left(-2\frac{1}{2}x^3 - 1{,}25x\right)$$

$$\underbrace{\frac{5}{4}x - 2}_{\text{Rest}}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{4}}_{\text{„Asymptotische Funktion"}} + \underbrace{\frac{\frac{5}{4}x-2}{2x^3-x}}_{\text{Rest}}$$

Graph

$$f_t(x) = \frac{2x^2 - (2t+1)\cdot x}{x-t}$$

~~439~~
441

<u>Nullstellen</u> $f_t(x) = 0 \Longleftrightarrow 2x^2 - (2t+1)\cdot x = 0$

$\Longleftrightarrow x \cdot [2x - 2t - 1] = 0$

$\underline{\underline{x_1 = 0}}$ [unabh. von t]

$2x - 2t - 1 = 0$

$\underline{\underline{x_2 = t + \frac{1}{2}}}$

Idee

$\underline{D(f)}$ Wo gilt $N(x)=0$?

$\Leftrightarrow x-t=0$

$\underline{\underline{x=t}}$

$D(f_t)=\mathbb{R}\setminus\{t\}$

Polstelle Wir betrachten die Stelle $x=t$

$t+h$ bzw $t-h$
mit $h \to 0$

$$\lim_{h\to 0} f(t+h) = \lim_{h\to 0} \frac{2(t+h)^2-(2t+1)(t+h)}{t+h-t}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{t^2}+\cancel{2th}+h^2-2t^2-\cancel{2th}-t-h}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-t^2-t-h-h^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} -\frac{1}{h}t^2-\frac{1}{h}t-1-h = -\infty$$

$\lim_{h\to 0} f(t-h)$ analog

Grafik

hebbare Lücken liegen endlich vor

$$f_t(x) = \frac{2x^2 - (2t+1)x}{x-t}$$

<u>Polstelle</u> Wir untersuchen

$$\lim_{h \to 0} f_t(t+h) \;\Big|\; \lim_{h \to 0} f_t(t-h)$$

$$\lim_{h \to 0} f_t(t+h) = \lim_{h \to 0} \frac{2(t+h)^2 - (2t+1)(t+h)}{(t+h)-t}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{2t^2} + 4th + 2h^2 - \cancel{2t^2} - 2th - t - h}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2th + 2h^2 - t - h}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} 2t + h - \frac{t}{h} - 1$$

$$\stackrel{!}{=} -\infty \quad \left(\text{analog } \lim_{h \to 0} f_t(t-h)\right)$$

<u>Grafik</u>

## Asymptote"

$$\left[2x^2-(2t+1)\cdot x\right] : \left[x-t\right] = \underbrace{2x-1} + \frac{-t}{x-t}$$

Asympt. Funkt. unabh. von t

$$\begin{array}{l} -\left(2x^2-2tx\right) \\ \hline 2tx-2tx-x \\ \quad -x \\ \quad -(-x+t) \\ \hline \quad\quad -t \end{array}$$

## Ausblick

→ Generalbeispiele zu Kurvendiskussionen gebrochen-rationaler Funktionen und Funktionenscharen

→ Anwendungsaufgaben mit gebr. rat. Funktionen