88
438

Musterbeispiel: Kurvendiskussion gebrochen-rationale Funktion

$$f(x) = \frac{3x^2 - 3x}{x^2 - 4x + 4} = \frac{3x(x-1)}{(x-2)^2}$$

① Definitionsbereich

Die Nullstellen des Nenners gehören nicht! zum $D(f)$

$$x^2 - 4x + 4 \overset{?}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (x-2)^2 = 0$$

$$x = +2 \quad \text{["doppelte Nullstelle"]}$$

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{+2\}$$

② Symmetrie

$f(x) = f(-x)$ y-Achsensym

$f(-x) = -f(x)$ Nullpunktsymm

$$f(-x) = \frac{3\cdot(-x)^2 - 3\cdot(-x)}{[(-x)-2]^2} = \frac{3x^2+3x}{(-x-2)^2} = \frac{3x^2+3x}{(x+2)^2} \checkmark$$

$$-f(x) = -\frac{3x^2-3x}{(x-2)^2} = \frac{3x-3x^2}{(x-2)^2} \checkmark$$

Keine Symmetrie vorhanden

b) Polstellen; senkrechte Asymptoten

Gesucht sind die Nullstellen des Nenners, bei denen der Zähler nicht verschwindet. [, hebbar Lü

$$(x-2)^2=0$$
$$x=2$$

$$\lim_{h\to 0} f(2+h) = \lim_{h\to 0} \frac{3(2+h)^2-3(2+h)}{(2+h-2)^2}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{12+12h+3h^2-6-3h}{h^2}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{6+9h+3h^2}{h^2}$$

$$= \lim_{h\to 0} \left[3+\frac{9}{h}+\frac{6}{h^2}\right] \overset{!}{=} +\infty$$

etwas kürzer

$$\lim_{h\to 0} f(2-h) = \lim_{h\to 0} \frac{12-12h+3h^2-6-3h}{h^2}$$

$$= \lim_{h\to 0} +3-\frac{15}{h}+\frac{6}{h^2} \overset{!}{=} +\infty$$

④ $\lim_{x \to \pm\infty} f(x)$ | „schiefe" Asymptote

Wir führen eine Polynomdivision durch

$$(3x^2-3x):(x-2)^2$$

$$=(3x^2-3x):(x^2-4x+4)=3+\frac{9x-12}{(x-2)^2}$$

$$-(3x^2-12x+12)$$

$$0 \quad +9x-12$$

Rest

$y=3$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\left[3+\frac{9x-12}{x^2-4x+4}\right]$$

$$=3+\lim_{x\to\pm\infty}\frac{9x-12}{x^2-4x+4}$$

$$=3+0$$

$$=3$$

$y=3$ ist waagerechte Asymptote.

(5) Nullstellen

Wir suchen die Nullstellen des Zählers:

$$3x^2 - 3x = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x\left[x - 1\right] = 0$$

$x_1 = 0$ $x_2 = +1$ sind Nullstellen.

6) Ableitungen

Normalerweise beschränkt man sich i. A. auf die erste und zweite Ableitung

$$f(x) = \frac{3x^2 - 3x}{(x-2)^2}$$

~~bei~~ Quotientenregel $\left[\frac{u}{v}\right]' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$u(x) = 3x^2 - 3x$

$u'(x) = 6x - 3$

$v(x) = (1 \cdot x - 2)^2$

$v'(x) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{innere} \\ 1}}{1} \cdot \underbrace{2(x-2)^1}_{\text{äußere } A.}$

(Kettenregel)

$$f'(x) = \frac{(6x-3)\cdot(x-2)^2 - (3x^2-3x)\cdot 1 \cdot 2(x-2)^1}{\left[(x-2)^2\right]^2}$$

niemals die Klammern auflösen!

$$= \frac{(6x-3)\cdot(x-2)^2 - (3x^2-3x)\cdot 2 \cdot (x-2)}{(x-2)^4}$$

$$\overset{!!}{=} \frac{\cancel{[x-2]}\cdot\left[(6x-3)(x-2) - (3x^2-3x)\cdot 2 \cdot 1\right]}{(x-2)^{\cancel{4}\,3}}$$

$$\overset{!}{=} \frac{(6x-3)(x-2) - 2(3x^2-3x)}{(x-2)^3}$$

!! Erst einmal so stehen lassen

Zur Ermittlung der 2. Ableitung vereinfacht man den Zähler der 1. Ableitung:

$$Z_{f'}(x) = (6x-3)(x-2) - 2(3x^2-3x)$$

$$= \cancel{6x^2} - 12x - 3x + 6 - \cancel{6x^2} + 6x$$

$$= -9x + 6$$

$$f'(x) = \frac{-9x+6}{(x-2)^3} = \frac{3(2-3x)}{(x-2)^3}$$

$u = -9x + 6 \quad u' = -9$

$v = (x-2)^3 \quad v' = \underbrace{1}_{\text{innere Abl.}} \cdot \underbrace{3 \cdot (x-2)^2}_{\text{äußere Abl.}}$

$$f''(x) = \frac{-9 \cdot (x-2)^3 - (-9x+6) \cdot 1 \cdot 3 \cdot (x-2)^2}{(x-2)^6}$$

nie ausmultipl.!

$$\stackrel{!}{=} \frac{(x-2)^2 \cdot [-9(x-2)^1 - (-9x+6) \cdot 3 \cdot 1]}{(x-2)^{\cancel{6}\,4}}$$

$$= \frac{-9x + 18 + 27x - 18}{(x-2)^4}$$

$$= \frac{18x}{(x-2)^4}$$

(7) Extrema

Notw. Bed $f'(x)=0$

$$\Longleftrightarrow (6x-3)\cdot(x-2)-2(3x^2-3x)=0$$

Ausklammern ist nicht möglich, also

$$6x^2-12x-3x+6-6x^2+6x=0$$

$$-9x+6=0$$

$$x_E=\frac{2}{3}$$

Hinr. Bed $\boxed{f'(x)=0 \wedge f''(x)\neq 0}$

$$f''(x)=\frac{18x}{(x-2)^4}\Bigg|_{x=\frac{2}{3}} = \frac{>0}{>0} \hat{=} >0$$

$$\left(\frac{2}{3}\Big/ f\left(\frac{2}{3}\right)\right)_{\text{Mini}}$$

8) Wendestelle

notw. Bed. $f''(x) = 0$

$$f''(x) = \frac{18x}{(x-2)^4} = 0 \iff x = 0$$

zur Vermeidung von $f'''(x)$ wählen wir das „Vorzeichenkriterium" für Wendestelle:

$f''(x)$ hat VZW bei $x = 0$

Sei $h > 0$

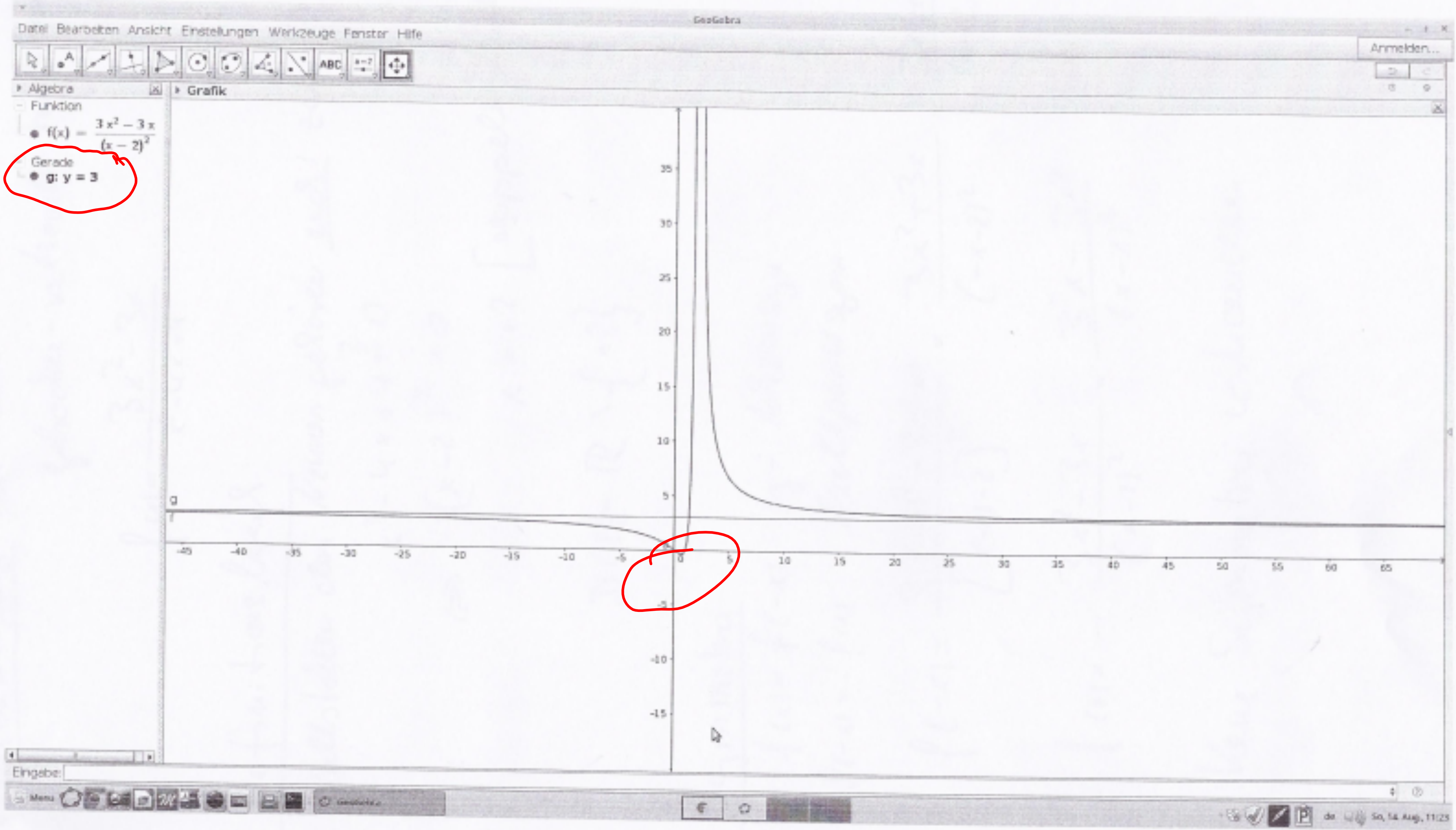
$$f''(0+h) = f''(h) = \frac{18h}{(h-2)^4} \triangleq \frac{>0}{>0} \triangleq >0$$

$$f''(0-h) = f''(-h) = \frac{-18h}{(-h-2)^4} \triangleq \frac{<0}{>0} \triangleq <0$$

also VZW

$(0|f(0))$ ist Wendestelle

9) Graph mit Geogebra


GeoGebra
Datei Bearbeiten Ansicht Einstellungen Werkzeuge Fenster Hilfe
Anmelden...
Algebra
Funktion
f(x) = (3 x² − 3 x) / (x − 2)²
Gerade
g: y = 3
Grafik
g
Eingabe: