Beispielaufgabe Kurvendiskussion einer gebrochen-rationalen Funktionenschar

$$f_c(x) = \frac{1}{cx^2+1} \qquad c \neq 0$$

441

① Definitionsmenge

Wo gilt $N(x) = 0$?

$$cx^2+1=0 \quad |-1$$

$$cx^2 = -1 \quad |:c \neq 0$$

$$x^2 = -\frac{1}{c} \quad \text{nur definiert für } c<0$$

$$x_1 = +\sqrt{-\frac{1}{c}} \qquad x_2 = -\sqrt{-\frac{1}{c}} \qquad c<0$$

Ist $c>0$, so gilt

$$x^2 = -\frac{1}{c} \text{ ↯ also } D(f) = \mathbb{R}$$

Zusammen:

$$D(f_c) = \mathbb{R} \quad \text{falls } c>0$$

$$D(f_c) = \mathbb{R} \setminus \left\{\pm\sqrt{-\frac{1}{c}}\right\} \quad \text{falls } c<0$$

② Symmetrien

$f_t(x) = f_t(-x)$ y-Achsensymmetrie

$f_t(-x) = -f_t(x)$ Nullpunktsymmetrie

$f_c(-x) = \dfrac{1}{c\cdot(-x)^2+1} = \dfrac{1}{cx^2+1} = f_c(x)$ y-Achsensymm.

③ Senkrechte Asymptoten

Wegen $D(f_c(x)) = \mathbb{R} \setminus \left\{ \pm\sqrt{-\frac{1}{c}} \right\}$ mit $c<0$

und $Z(x) = 1$ ist

$x_1 = +\sqrt{-\frac{1}{c}} \quad x_2 = -\sqrt{-\frac{1}{c}} \quad c<0$

Senkrechte Asymptote

④ Waagrechte Asymptote

$$\lim_{x\to\pm\infty} f_c(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{cx^2+1} = 0$$

Die x-Achse ist Asymptote

[redacted]

⑤ Nullstellen

$$f_c(x) = \frac{1}{cx^2+1} \neq 0 \text{ für alle } x \in D(f_c(x))$$

⑥ Ableitungen

$$f_c(x) = \frac{1}{cx^2+1} \qquad \left[\frac{u}{v}\right]' = \frac{u'\cdot v - u\cdot v'}{v^2}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} u(x)=1 \\ v(x)=cx^2+1 \end{array}} \quad \begin{array}{l} u'(x)=0 \\ v'(x)=2cx \end{array}$$

$$f_c'(x) = \frac{0\cdot(cx^2+1) - 1\cdot 2cx}{[cx^2+1]^2}$$

$$= \frac{-2cx}{[cx^2+1]^2}$$

$u(x) = -2cx$

$u'(x) = -2c$

$v(x) = [cx^2+1]^2$

$v'(x) = 2cx \cdot 2 \cdot [cx^2+1]^1$

$$f_c''(x) = \frac{-2c\cdot[cx^2+1]^2 - (-2c)\cdot 2cx\cdot 2\cdot \cancel{[cx^2+1]^1}}{[cx^2+1]^{\cancel{4}\,3}}$$

$$\stackrel{!}{=} \frac{-2c[cx^2+1] + 8c^2x}{[cx^2+1]^3}$$

(7) Extrema

notw. Bed $f_c'(x)=0 \iff -2cx=0$

$\iff x=0$

hinr. Bed $f_c'(x)=0 \wedge f_c''(x)\neq 0$

$$f_c''(0) = \frac{-2c\cdot[c\cdot 0^2+1]+8c\cdot 0}{[c\cdot 0^2+1]^3}$$

$$= \frac{-2c}{1} = -2c \begin{cases} >0 & c<0 \\ <0 & c>0 \end{cases}$$

$(0|f_c(0))$ ist Max für $c>0$

$(0|f_c(0))$ ist Min für $c<0$

(8) Wendestellenkandidate

$$f_c''(x)=0 \Leftrightarrow -2c\left[cx^2+1\right]+8c^2x=0$$

$$\Leftrightarrow -2c^2x^2-2c+8c^2x=0 \quad \Big| : -2c^2$$

$$\Leftrightarrow x^2-4x+\frac{1}{c}=0$$

$$\Leftrightarrow x_{1,2}=2\pm\sqrt{4-\frac{1}{c}}$$

falls $\boxed{4-\frac{1}{c}\geq 0}$

$$\Leftrightarrow 4\geq\frac{1}{c}$$

Fall $4\geq\frac{1}{c}$ sind $x_1=2+\sqrt{4-\frac{1}{c}}$

$x_2=2-\sqrt{4-\frac{1}{c}}$

Wendestellenkandidaten.

(9) Graph