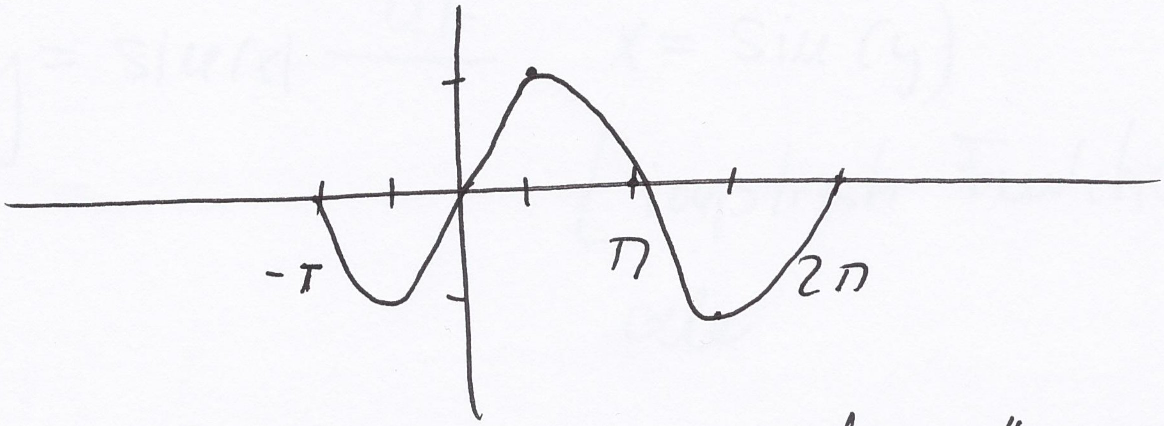
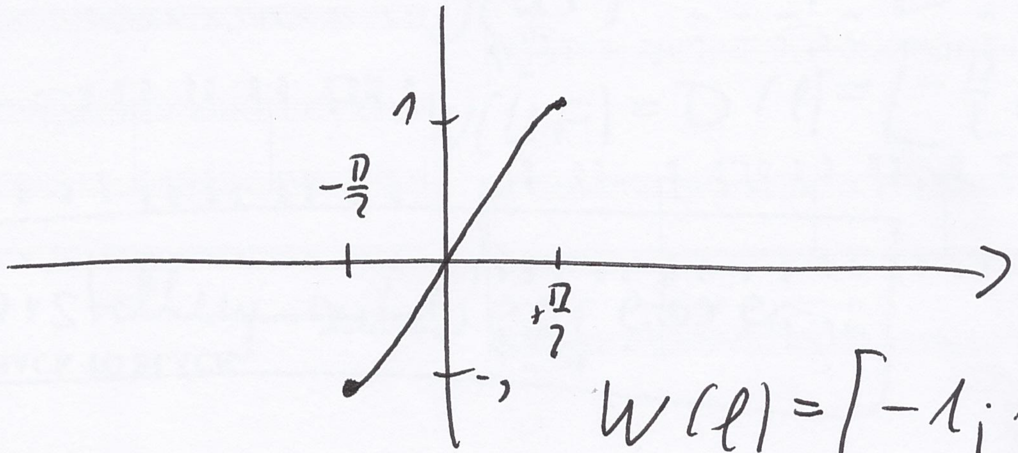
arc sin



① Um $f(x) = \sin(x)$ „umzukehren", muß $f(x) = \sin(x)$ eingeschränkt werden.

$f(x) = \sin(x)$ $\quad D(f) = \left[-\frac{1}{2}\pi ; +\frac{1}{2}\pi\right]$



$W(f) = [-1 ; 1]$

Eine formale Umkehrung liefert

$y = \sin(x) \xrightarrow{UF} x = \sin(y)$

[implizite Funktionsgleichung

oder

$y = \arcsin(x)$

„y gleich arcussinus von x"

mit

$D(UF) = W(f) = [-1; 1]$

$W(UF) = D(f) = [-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2}]$

$\boxed{\text{Darstellung mit Geogebra}}$

Die Ableitung von $y = \arcsin(x)$

Es war $D(f) = [-1; 1]$

$W(f) = \left[-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2}\right]$

Wir lenken die „Methode des impliziten Differenzierens" und leiten

$$x = \sin(y) \quad \text{ab}$$

$$1 = y' \cdot \cos(y) \quad \Big| : \cos(y) \neq 0$$

$$y' = \frac{1}{\cos(y)}$$

$\sin^2 + \cos^2 = 1$

$\Leftrightarrow \cos = \sqrt{1 - \sin^2}$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(y)}}$$

$$= \cancel{\sqrt{1}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

weil $\sin^2(\arc\sin x)$

$= [\sin(\arc\sin(x))]^2$

$= [x]^2$

mit $-1 < x < 1$!!!

d.h. der „neue" Def-bereich von

$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ist $D(y') =]-1;+1[$

4

$\boxed{\text{arc cos}}$

Völlig analog zu „arc sin" verfährt man bei arc cos

(1) $f(x) = \cos(x)$ wird eingeschränkt auf

$D(f) = [0; \pi]$ und $W(f) = [-1; +1]$

Mit $y = \cos(x)$ erhält man

$$\underbrace{x = \cos(y)}_{\text{implizite Darstellung}} \Longleftrightarrow \underbrace{y = \arccos(x)}_{\text{explizite Darst der UF}}$$

und

$$D(UF) = W(f) = [-1; 1]$$
$$W(UF) = D(f) = [0; \pi]$$

Darstellung mit Geogebra

Ableitung von $y = \arccos(x)$ ebenfalls völlig analog

$$x = \cos(y) \quad (\,)'$$

$$1 = y' \cdot (-\sin(y)) \quad [\text{Kettenregel}]$$

$$y' = -\frac{1}{\sin(y)} \qquad \sin^2 + \cos^2 = 1$$

$$\sin = \sqrt{1 - \cos^2}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2(y)}}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{1-[\cos(y)]^2}}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{1-[\cos(\arccos(x))]^2}}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad D =]-1; 1[$$

$$\boxed{y = \arctan(x)}$$

Wir betrachten $y = \tan(x)$ auf $D(f) = \left[-\frac{1}{2}\pi; \frac{1}{2}\pi\right]$

$W(f) = \mathbb{R}$

$$y = \tan(x) \xleftrightarrow{UF} x = \tan(y)$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$y = \arctan(x)$$

$$D(UF) = W(f) = \mathbb{R}$$

$$W(UF) = D(F) = \left[-\frac{1}{2}\pi; \frac{1}{2}\pi\right]$$

Graphische Darstellung mit Geogebra

1

Ableitung von $y = \arctan(x)$

Wir betrachten $y = \tan(x)$ mit $y' = \frac{1}{\cos^2(x)}$

$= \tan^2(x) + $

[Wegen $y = \tan(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$ ist $y' = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin(x) \cdot (-\sin$

$$\cos^2$$

$$= \frac{\cos^2 + \sin^2}{\cos^2}$$

$$= \frac{1}{\cos^2}$$

und weil

$$\tan^2(x) + 1 \stackrel{\wedge}{=} \frac{\sin^2}{\cos^2} + 1 = \frac{\sin^2}{\cos^2} + \frac{\cos^2}{\cos^2} = \frac{\sin^2 + \cos^2}{\cos^2} = \frac{1}{\cos^2}$$

Wir betrachten nun

$$y = \arctan(x) \Longleftrightarrow x = \tan(y)$$

$$x = \tan(y) \quad |(\,)'$$

$$1 = y' \cdot \frac{1}{\cos^2(y)} \quad | \cdot \cos^2(y)$$

$$y' = \cos^2(y)$$

1

also $y' = \cos^2(y)$

$$= \frac{1}{\frac{1}{\cos^2(y)}}$$

$$= \frac{1}{\tan^2(y)+1}$$

$$= \frac{1}{[\tan(y)]^2+1}$$

$$= \frac{1}{[\tan(\arctan(x))]^2+1}$$

$$= \frac{1}{x^2+1}$$

Ausblick

- Beispiele zur Abl. der arcus-Fu

⇒ Kennenlernen der Fkt mit arc

2

Ableitungsübungen

452

1) $f(x) = \arcsin(4x-2)$

2) $f(x) = \arctan(3-\sqrt{x})$

3) $g(z) = z + \arctan(1+z^2)$

4) $h(a) = \arctan(\sqrt{a} - a^2)$

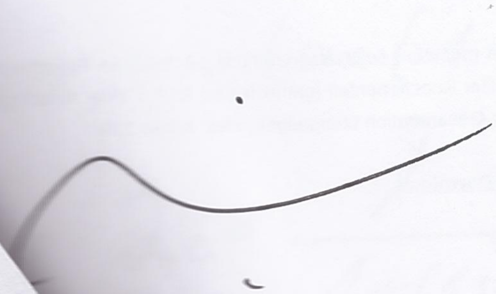
5) $k(v) = \sqrt{\arctan(v)}$

6) $p(x) = \arccos^2\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$

7) $f(x) = \arcsin(x) - \arccos(\sqrt{x})$

$g(z) = \arctan^2(z) - \arctan(z^2)$

③



usw. Es
ist nicht

Lösunge

Merken $\left[\arcsin(x)\right]' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ohne Beachtung der Bereiche!!

$$\left[\arccos(x)\right]' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

453

$$\left[\arctan(x)\right]' = \frac{1}{1+x^2}$$

---

① $f(x) = \arcsin(4x-2)$

$$f'(x) = 4 \cdot \frac{1}{\sqrt{1-(4x-2)^2}}$$

② $f(x) = \arctan(3-\sqrt{x})$

$$f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{1+(3-\sqrt{x})^2}$$

③ $g(z) = z + \arctan(1+z^2)$

$$g'(z) = 1 + 2z \cdot \frac{1}{1+(1+z^2)^2}$$

1)
$$h(a) = \arctan\left(\sqrt{a} - a^2\right)$$

$$h'(a) = \left(\frac{1}{2\sqrt{a}} - 2a\right) \cdot \frac{1}{1 + \left(\sqrt{a} - a^2\right)^2}$$

5)
$$k(r) = \sqrt{\arctan(r)}$$

$$= \left[\arctan(r)\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\frac{1}{1+r^2}\right) \cdot \frac{1}{2} \cdot \left[\arctan(r)\right]^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{1+r^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\arctan(r)}}$$

6)
$$p(x) = \arcsin(x) - \arccos(\sqrt{x})$$

$$p'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{-1}{1-(\sqrt{x})^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x} \cdot (1-x)}$$

f) $f(x)$ siehe 6

(6) $p(x) = \arccos^2\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$

$$= \left[\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right]^2$$

$$p'(x) = 2\cdot\left[\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right]^1 \cdot [\quad]'$$

$$= 2\cdot\left[\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right]\cdot\left[-\frac{1}{2}\cdot x^{-\frac{3}{2}} \cdot \frac{-1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2}}\right]$$

$$= 2\cdot\left[\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right]\cdot\left[+\frac{1}{2\sqrt{x^3}\cdot\sqrt{1-\frac{1}{x}}}\right]$$

(8) $g(z) = \arctan^2(z) - \arctan(z^2)$

$$= \left[\arctan(z)\right]^2 - \arctan(z^2)$$

$$= 2\cdot\left[\arctan(z)\right]^1 \cdot \frac{1}{1+z^2} - 2z\cdot\frac{1}{1+(z^2)^2}$$

$$= \frac{2\arctan(z)}{1+z^2} - \frac{2z}{1+z^4}$$