$$f(x) = \arcsin(\sqrt{x})$$

Wdhg:

$\arcsin(x)$: $D(f) = [-1; +1]$

$W(f) = [-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$

$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $D(f') =]-1; 1[$

Definitionsbereich

Wegen „$\sqrt{x}$" ist der kleinste Wert $x=0$

und für $\sqrt{x} \leq 1$ ist $x \leq 1$, also $D(f) = [0; +1]$

Nullstellen

$\arcsin(x)$ hat nur bei $x=0$ eine Nullstelle.

Aus $\sqrt{x} = 0$ folgt $x=0$

Also hat $f(x) = \arcsin(\sqrt{x})$ nur bei $x=0$ eine Nullstelle.

Graphische Darstellung

Extrema Wir beachten $D(f) = [0;1]$ und rechnen

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}\cdot\sqrt{1-x}} \neq 0$$

Es gibt keine Extrema

Wendepunkte Wir „vereinfachen" $f'(x)$:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}} = \frac{1}{2\sqrt{x-x^2}}$$

Sei $u = 1 \quad u' = 0$

$v = 2\sqrt{x-x^2} \quad v' = 2\cdot(1-2x)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x-x^2}}$

$$= \frac{1-2x}{\sqrt{x-x^2}}$$

$$f''(x) = \frac{0\cdot 2\sqrt{x-x^2} - 1\cdot\left[\frac{1-2x}{\sqrt{x-x^2}}\right]}{\left[2\sqrt{x-x^2}\right]^2}$$

$$= \frac{-1+2x}{\sqrt{x-x^2}\left[2\sqrt{x-x^2}\right]^2}$$

$$f''(x) = 0 \Longleftrightarrow -1 + 2x = 0$$

$$\Longleftrightarrow \qquad x = \frac{1}{2}$$

An der Stelle $[0.5 \mid f(0.5)]$ liegt – ohne Überprüfung mit $f'''(\frac{1}{2}) \neq 0$ – ein Wendepunkt vor.

[Verweis auf Grafik]

<u>Differenzierbarkeit</u> Wir beschränken uns logischerweise auf $D(f) = [0; +1]$

An den Stellen $x = 0$ und $x = 1$ ist $f(x)$ nicht differenzierbar:

Mit $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x - x^2}}$ ist $f'(0) = \dfrac{1}{2 \cdot 0}$ nicht def

und $f'(1) = \dfrac{1}{2\sqrt{1-1}}$ nicht def

$D(f') =]0; 1[$

Wendetangente

Zu deren Ermittlung benötigen wir (a)

(a) den Wendepunkt $(0.5 \,|\, f(0.5))$

(b) die Steigung an der Wendestelle, also $f'(0.5)$

zu a) $f(0.5) = \arcsin\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right) \approx 0{,}79$

$W(0.5 \,|\, 0.79)$

$$f'(0.5) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{1-\frac{1}{2}}} \overset{!}{=} \frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{1}} = 1$$

$m = 1$

$y = m \cdot x + n$

$m = 1$ $\quad y = x + n \quad (0.5 \,|\, 0.79)$

$0.75 = 0.5 + n$

$n = 0.25 = \frac{1}{4}$

$y = x + \frac{1}{4}$ Gleichung der Wendetangente