Anwendungsaufgabe

Mithilfe der Funktion

$$W(t) = 15 \cdot \left[1 + \arctan\left(0.05 \cdot [t-30]\right)\right]$$

kann modellhaft das Wachsen eines Baumes beschrieben werden. [$t \mathrel{\hat=}$ Jahr $W(t) \mathrel{\hat=}$ Wachstumshöhe in m]

(a) Ermittle die Höhe des Setzlings bei Beobachtungsbeginn

(b) Wann hat der Baum seine Maximalhöhe erreicht, wann 90% davon?

(c) Wann beträgt die momentane Wachstumsgeschwindigkeit 0,5 m/Jahr?

(d) Wie groß ist die maximale Wachstumsgeschwindigkeit. Wann tritt sie auf?

(e) graphische Darstellung mit Geogebra

(a) $w(0) = 15 + 15 \cdot \arctan\left(\frac{0}{20} - \frac{3}{2}\right)$

$= 15 + 15 \arctan\left(-\frac{3}{2}\right)$

$\approx \underline{\underline{0{,}2581\ [m]}}$

(b) $\lim\limits_{t \to \infty} \left[15 + 15 \arctan\left(\frac{t}{20} - \frac{3}{2}\right)\right]$

$$= 15 + \underbrace{\lim_{t \to \infty} 15 \arctan\Big(\underbrace{\tfrac{t}{20} - \tfrac{3}{2}}_{\to \infty}\Big)}_{\frac{\pi}{2}}$$

$\stackrel{!}{=} 15 + 15 \cdot \frac{\pi}{2}$

$\approx 38{,}56$ m [Maximalhöhe, theoretisch]

90% von $38{,}56 \approx \underline{\underline{34{,}7}}$

$$v(t) = 15 + 15 \cdot \arctan\left(\frac{t}{20} - 1.5\right) \stackrel{?}{=} 34{,}7$$

$$\arctan\left(\frac{t}{20} - 1.5\right) = \frac{34{,}7 - 15}{15} \quad | \tan$$

$$\frac{t}{20} - 1.5 = \tan(1{,}3136)$$

$$\frac{t}{20} - 1.5 = 3{,}8 \quad | +1.5 \,|\cdot 20$$

$$t = (3{,}8 + 1.5) \cdot 20$$

$$\underline{\underline{t = 108 \text{ [Jahr]}}}$$

(c) $w(t) = 15 + 15 \cdot \arctan\left(\frac{t}{20} - \frac{3}{2}\right)$

$$w'(t) = 15 \cdot \left[\frac{1}{20}\right] \cdot \frac{1}{1 + \left[\frac{t}{20} - \frac{3}{2}\right]^2}$$

$$= \frac{3}{4 + 4 \cdot \left[\frac{t}{20} - \frac{3}{2}\right]^2}$$

$$= \frac{3}{4 + \frac{4t^2}{400} - \frac{12}{20}t + 9}$$

$$= \frac{3}{13 + \frac{t^2}{100} - \frac{3}{5}t}$$

$$= \frac{3}{\frac{1300 + t^2 - 60t}{100}}$$

$$= \underline{\underline{\frac{300}{t^2 - 60t + 1300}}}$$

$$w'(t) \overset{?}{=} 0{,}5$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\frac{300}{x^2 - 60x + 1300} = \frac{1}{2} \qquad \Big| \cdot 2 \Big| \cdot (x^2 - 60x + 1300)$$

$$600 = x^2 - 60x + 1300$$

$$x^2 - 60x + 700 = 0$$

$$x_{1,2} = 30 \pm \sqrt{900 - 700}$$

$$= 30 \pm \sqrt{200}$$

$$\approx 30 \pm 14$$

$$x_1 = 44$$

$$\underline{\underline{x_2 = 16}}$$

d) Um die 2. Ableitung zur ermitteln und deren Nullstelle berechnen und gegeben

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -600x + 18.000 = 0$

$$\underline{\underline{x = 300}}$$