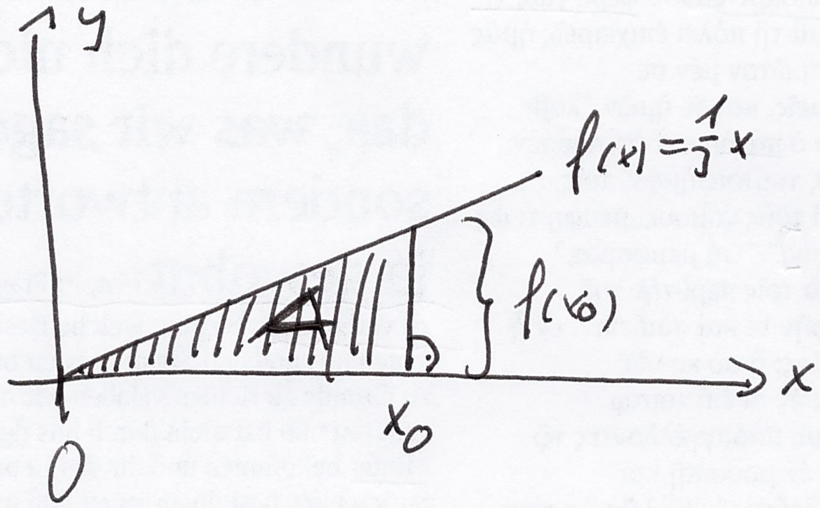
Flächeninhaltsfunktionen

1. Beispiel



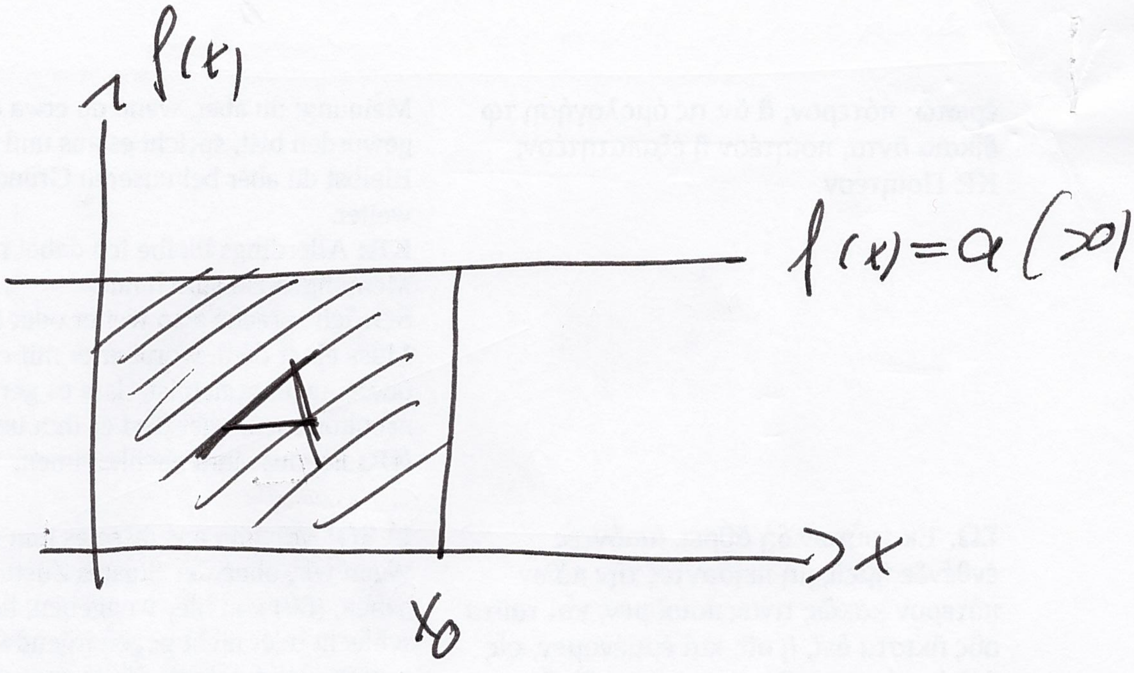
Für A gilt: $A_\Delta = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$

$$= \frac{1}{2} \cdot x_0 \cdot f(x_0)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot x_0 \cdot \frac{1}{3} x_0$$

$$\underline{\underline{= \frac{1}{6} x_0^2}} \qquad \left[f(x) = \frac{1}{3}x \right]$$

2. Beispiel



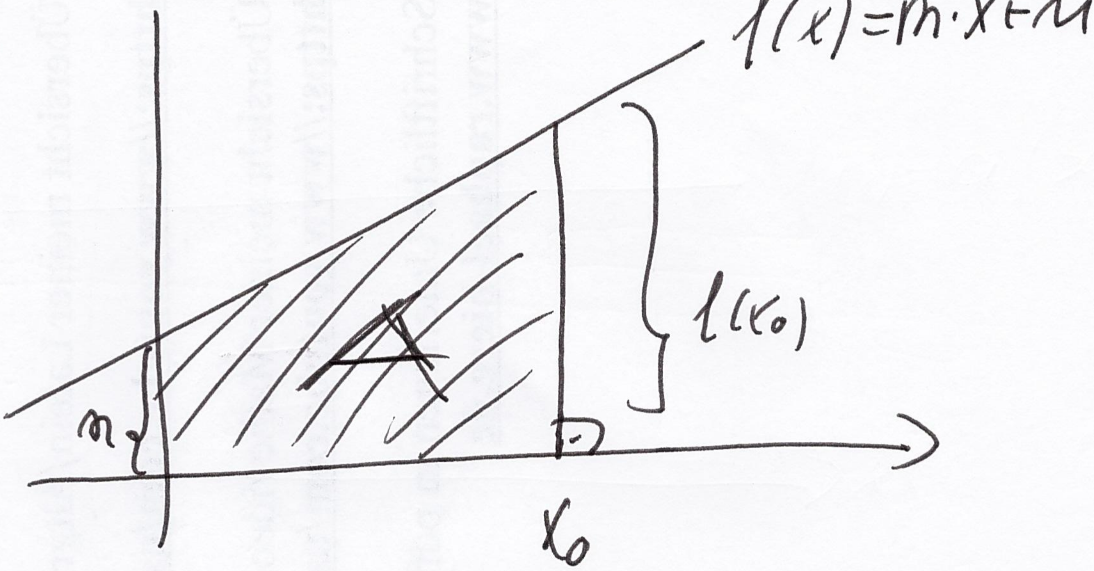
$$A = a \cdot b$$

$$= x_0 \cdot f(x_0)$$

$$= x_0 \cdot a$$

$$= \underline{\underline{a \cdot x_0}} \quad [f(x) = a]$$

3. Beispiel



$$A_{Trapez} = \frac{1}{2} \cdot \overbrace{(a+c)}^{\text{parallel}} \cdot h$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left[n + f(x_0) \right] \cdot x_0$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left[n + m x_0 + n \right] \cdot x_0$$

$$= \frac{1}{2} \left[m x_0 + 2n \right] \cdot x_0$$

$$= \frac{1}{2} m x_0^2 + n \cdot x_0 \qquad \left[f(x) = m \cdot x + n \right]$$

Zusammenfassung

Flächeninhaltsf.	„begrenzende" Fktn
$A(x_0) = \frac{1}{6} x_0^2$	$f(x) = \frac{1}{3} x$
$A(x_0) = a \cdot x_0$	$f(x) = a$
$A(x_0) = \frac{1}{2} m x_0^2 + n \cdot x_0$	$f(x) = m x + n$

Es fällt auf

$$A'(x) \overset{!}{=} f(x)$$

denn

$A(x) = \frac{1}{6} x^2$

$A'(x) = \frac{1}{3} x = f(x)$

oder

$A(x) = a \cdot x$

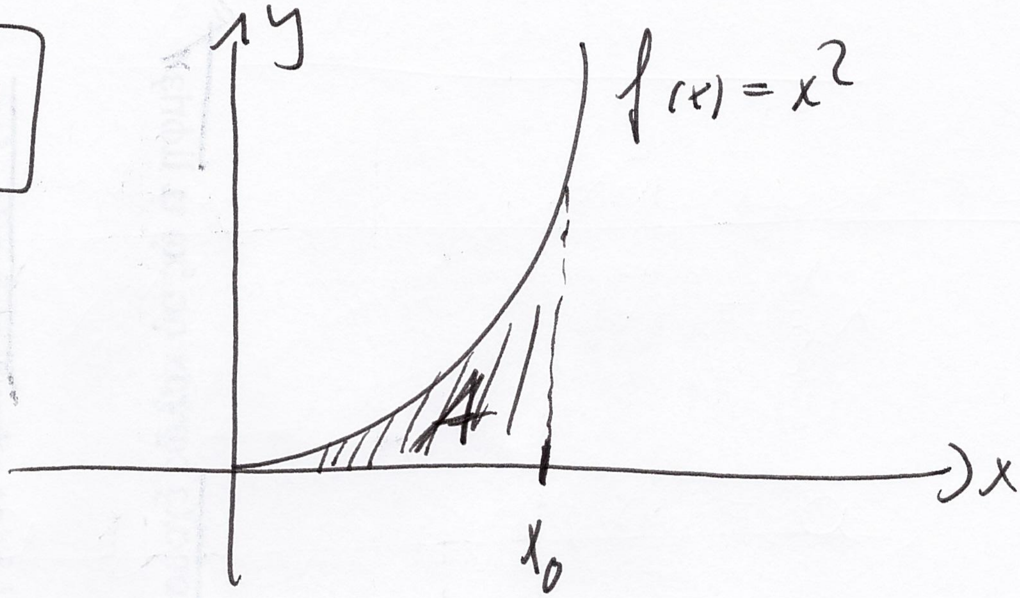
$A'(x) = a = f(x)$

oder

$A(x) = \frac{1}{2} m x^2 + n \cdot x$

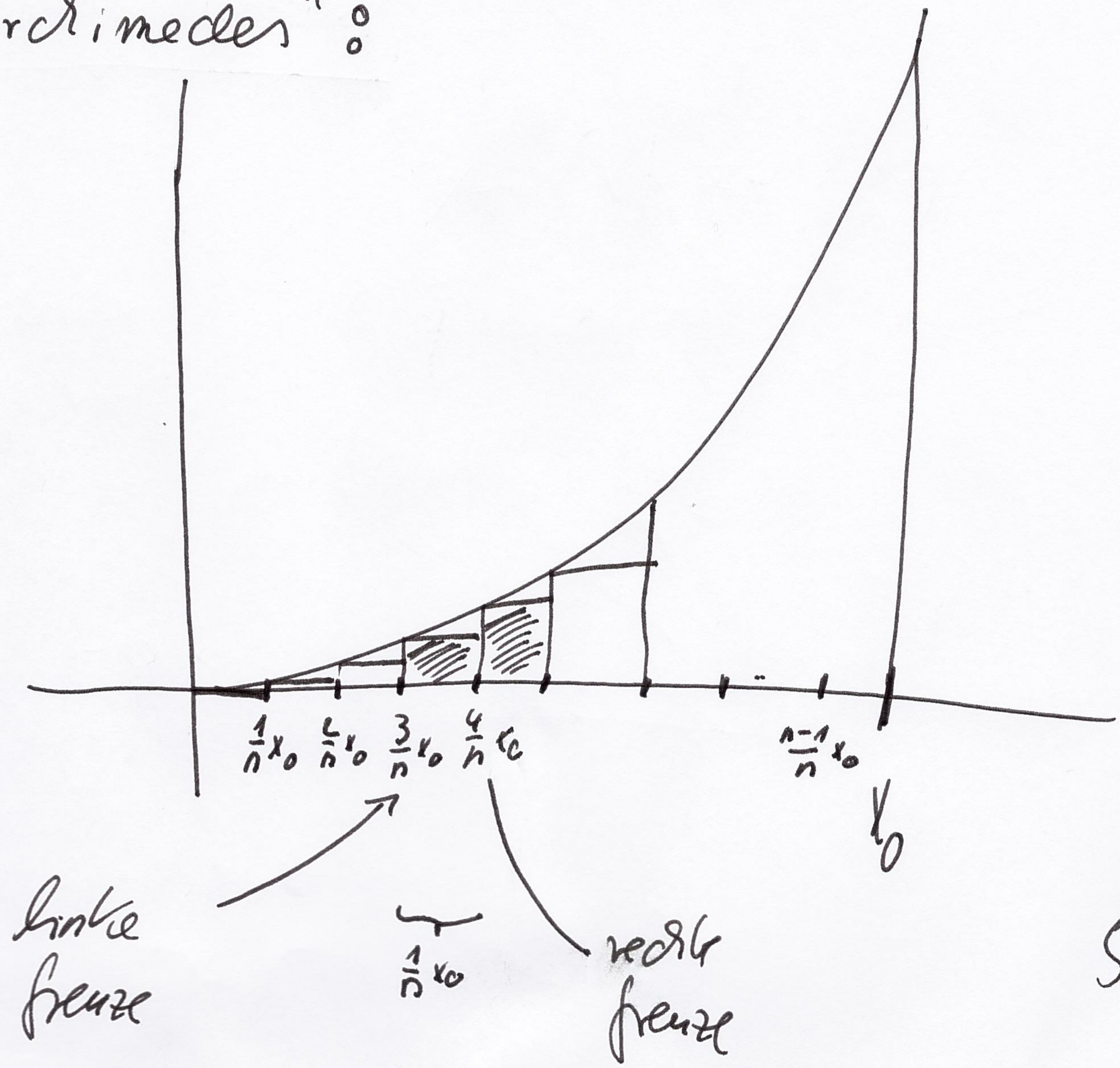
$A'(x) = m x + n = f(x)$

4. Beispiel



gesucht $A(x_0) = ?$

Wir verwenden die „Streifenmethode des Archimedes":



Die Rechtecke unterhalb der Parabel haben alle die Breite $\frac{1}{n}x_0$, und die Höhe f(linke Grenze), also

$$\text{Untersumme} = \frac{1}{n}x_0 \cdot f(0) + \frac{1}{n}x_0 \cdot f\left(\frac{1}{n}x_0\right) + \frac{1}{n}x_0 \cdot f\left(\frac{2}{n}x_0\right) + \dots + \frac{1}{n}x_0 f\left(\frac{n-1}{n}\cdot x_0\right)$$

Die Rechtecke oberhalb der Parabel haben alle die Breite $\frac{1}{n}$ und die Höhe f(rechte Grenze)

$$\text{Obersumme} = \frac{1}{n}x_0 f\left(\frac{1}{n}x_0\right) + \frac{1}{n}x_0 f\left(\frac{2}{n}x_0\right) + \dots \frac{1}{n}x_0 f\left(\frac{n}{n}x_0\right)$$

Man vereinfacht nun

→ Untersumme

→ Obersumme

. . . .

$$f(x)=x^2$$

Untersumme:

$$\frac{1}{n}x_0 f(0) + \frac{1}{n}x_0 f\left(\frac{1}{n}x_0\right) + \frac{1}{n}x_0 f\left(\frac{2}{n}x_0\right) + \dots + \frac{1}{n}x_0 f\left(\left(\frac{n-1}{n}\right)x_0\right)$$

$$= \frac{1}{n}x_0 0^2 + \frac{1}{n}x_0 \cdot \frac{1}{n^2}x_0^2 + \frac{1}{n}x_0 \frac{4}{n^2}x_0^2 + \dots + \frac{1}{n}x_0 \frac{(n-1)^2}{n^2}x_0^2$$

$$= 0 + \frac{1}{n^3}x_0^3 + \frac{2^2}{n^3}x_0^3 + \dots + \frac{(n-1)^2}{n^3}x_0^3$$

$$= \frac{x_0^3}{n^3}\cdot\left[0 + 1 + 2^2 + \dots + (n-1)^2\right]$$

$$= \frac{x_0^3}{n^3}\cdot \frac{1}{6}(n-1)\cdot n\cdot(2n-1)$$

$$= \frac{x_0^3}{n^3}\,\frac{n(2n^2-n-2n+1)}{6}$$

7

$$= \frac{x_0^3}{n^3}\cdot\frac{1}{6}\cdot\left[2n^3-3n^2+n\right]$$

$$= \frac{2}{6}\frac{x_0^3}{n^3}\cdot n^3 - \frac{3}{6}\frac{x_0^3}{n^3}n^2 + \frac{1}{6}\frac{x_0^3}{n^3}n = \underline{\underline{\frac{1}{3}x_0^3 - \frac{x_0^3}{2n} + \frac{x_0^3}{6n^2}}}$$

Obesumme $\quad f(x)=x^2$

$$\frac{1}{n}x_0\, f\!\left(\frac{1}{n}x_0\right) + \frac{1}{n}x_0\, f\!\left(\frac{2}{n}x_0\right) + \ldots + \frac{1}{n}x_0\, f\!\left(\frac{n}{n}x_0\right)$$

$$= \frac{1}{n}x_0\, \frac{x_0^2}{n^2} + \frac{1}{n}x_0\, \frac{2^2}{n^2}x_0^2 + \ldots + \frac{1}{n}x_0\, \frac{n^2}{n^2}x_0^2$$

$$= \frac{x_0^3}{n^3}\cdot \underbrace{\left[1 + 2^2 + \ldots + n^2\right]}$$

$$= \frac{x_0^3}{n^3}\cdot \frac{1}{6}\, n(n+1)(2n+1)$$

$$= \frac{x_0^3}{n^3}\cdot\frac{1}{6}\cdot\left[n(2n^2+n+2n+1\right]$$

$$= \frac{x_0^3}{6n^3}\left[2n^3+3n^2+n\right]$$

$$= \frac{1}{3}x_0^3 + \frac{1}{2}\frac{x_0^3}{n} + \frac{x_0^3}{6n^2}$$

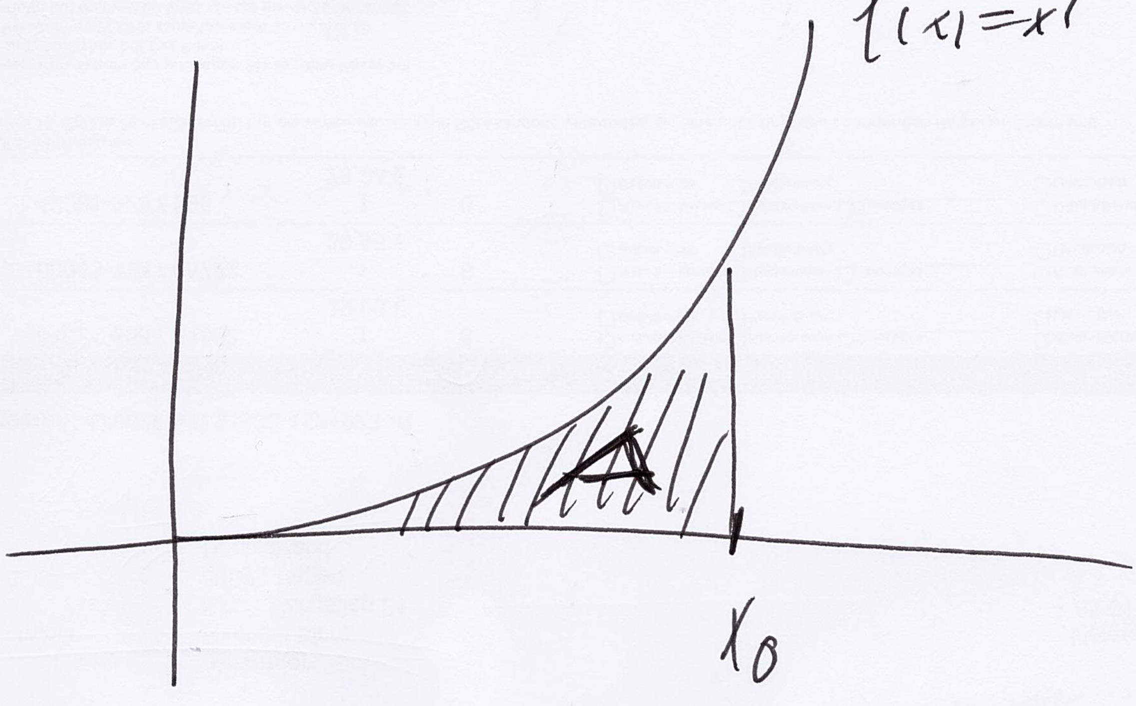
Für $n \to \infty$ werden die Einteilungen „immer feiner", die Unter- und Obersumme „rutschen aufeinander zu".

$$\lim_{n\to\infty} U_S = \lim_{n\to\infty}\Big[\frac{1}{3}x_0^3 - \underbrace{\frac{x_0^3}{2n}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{x_0^3}{6n^2}}_{\to 0}\Big]$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{3}x_0^3}}$$

$$\lim_{n\to\infty} O_S = \lim_{n\to\infty}\Big[\frac{1}{3}x_0^3 + \underbrace{\frac{x_0^3}{2n}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{x_0^3}{6n^2}}_{\to 0}\Big]$$

$$= \frac{1}{3}x_0^3$$



$$\underline{\underline{A = \frac{1}{3}x_0^3}}$$

Stammfunktion und unbestimmtes Integral

	Funktion f		Ableitung f'
Differenzieren:	$f(x) = x^7$	$\rightarrow$	$f'(x) = 7x^6$
	$f(x) = \sin(x)$	$\rightarrow$	$f'(x) = \cos(x)$
	$f(x) = a \cdot x^n$	$\rightarrow$	$f'(x) = a \cdot n \cdot x^{n-1}$
Integrieren	$g(x) = ?$	$\leftarrow$	$g'(x) = 9x^4$
	$g(x) = ?$	$\leftarrow$	$g'(x) = x^3 - 4$

Schreib- und Sprechweise

$$f(x) = 9x^4 \qquad \underbrace{F(x) = \frac{9}{5}x^5 + C}_{\text{Menge aller Stammfunktionen zu } f(x) = 9x^4} \qquad C \in \mathbb{R}$$

Integralschreibweise

$$\int 9x^4 \, dx = \frac{9}{5}x^5 + C \qquad C \in \mathbb{R}$$

Beispiel

(1) $$\int \cos x \, dx = \sin x + C$$

Denn $\left[\sin x + C\right]' = \cos x$

(2) $$\int x^n \, dx = \frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1} + C$$

denn

$$\left[\frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1} + C\right]'$$

$$= \frac{1}{n+1} \cdot (n+1) \cdot x^{n+1-1} + 0$$

$$= \underline{\underline{x^n}}$$

(3) $$\int a x^n \, dx = a \cdot \int x^n dx$$

$$= a \cdot \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$$

Unmittelbar ersichtliche Regeln

$$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad n \in \mathbb{Z}^{\neq -1}$$

$$\int [a f(x) + b \cdot g(x)] \, dx = a \cdot \int f(x) \, dx + b \int g(x) \, dx$$

Beispiel

$$\int (2x - 5x^2) \, dx = \int 2x \, dx - \int 5x^2 \, dx$$

$$= 2 \int x \, dx - 5 \int x^2 \, dx$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{2} x^2 + C_1 - \left[5 \cdot \frac{1}{3} x^3 + C_2 \right]$$

$$= x^2 + \underbrace{C_1 - \frac{5}{3} x^3 - C_2}_{= C}$$

$$\underbrace{= x^2 - \frac{5}{3} x^3 + C}_{\text{Beweis durch Ableiten dieser Stammfunktion}}$$

Integration der Exponentialfunktion

$f(x) = e^x$ und $f'(x) = e^x$

Daraus ergibt sich sofort

$$\int e^x \, dx = e^x + C$$

Integration der trigonometrischen Funktionen

$f(x) = \sin x \qquad f'(x) = \cos x$

$g(x) = \cos x \qquad g'(x) = -\sin x$

also ist

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + C_1$$

$$\int \cos x \, dx = +\sin x + C$$

Logarithmisches Integrieren

Aus der Differentialrechnung weiß man

$$f(x) = \ln x \qquad f'(x) = \frac{1}{x}$$

Daraus ergibt sich

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

weil ln nur für $x>0$ def. ist

1. Beispiel

$$\int \frac{1}{2x+1}\,dx \overset{!?}{=} \ln|2x+1| + C$$

Probe $\left[\ln|2x+1|\right]' = \underbrace{2}_{\text{innere Abl}} \cdot \frac{1}{2x+1}$

Verbesserung

$$\int \frac{1}{2x+1}\,dx = \frac{1}{2} \cdot \ln|2x+1| + C$$

KEHRWERT der „inneren Abl"

2. Beispiel

$$\int \frac{2x^2+1}{x}\,dx = \int \frac{2x^2}{x}\,dx + \int \frac{1}{x}\,dx$$

$$= \int 2x\,dx + \int \frac{1}{x}\,dx$$

$$= x^2 + \ln|x| + C$$

3. Beispiel

$$\int \frac{1}{5x-3}\,dx = \frac{1}{5}\cdot \ln|5x-3| + C$$

Kettenregel $[5x-3]'$

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Der in der Schulmathematik nicht leicht beweisbare „Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung" stellt einen Zusammenhang her zwischen

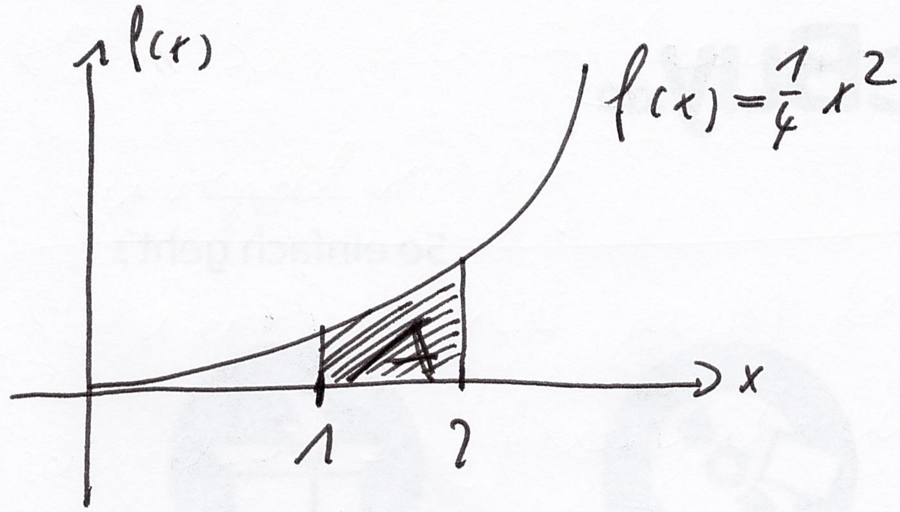
→ der Stammfunktion zu einer stetigen Funktion f

→ dem Flächeninhalt unter dem Graphen von f innerhalb der Grenzen a, b

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a), \quad a<b$$

Einfache Beispiele

1. Beispiel



Ansatz

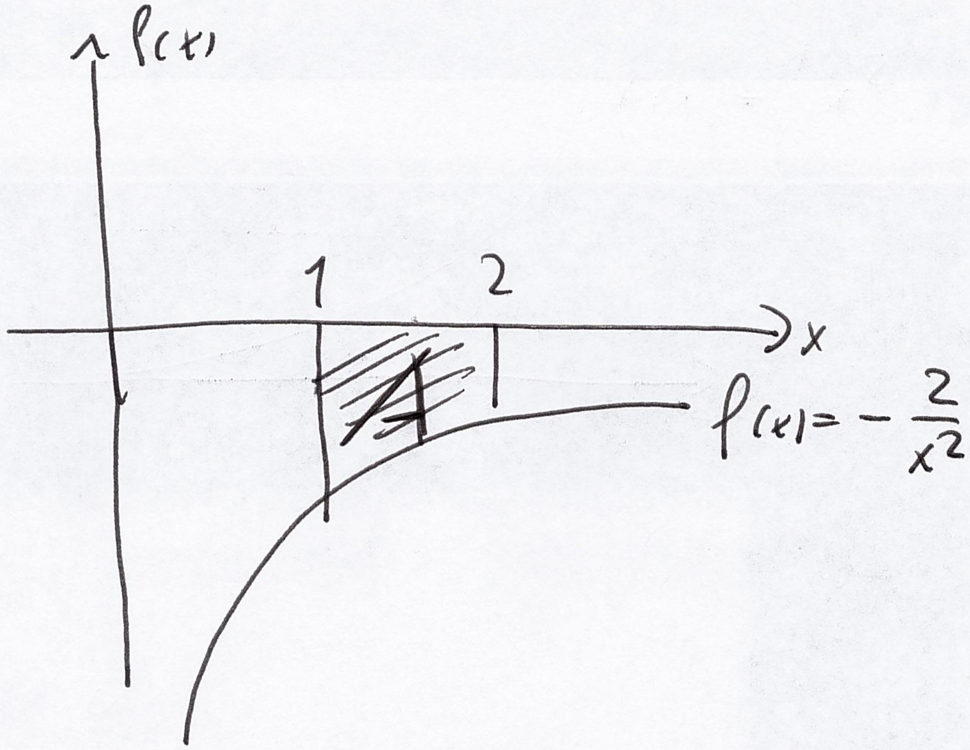
$$A = \int_1^2 \frac{1}{4} x^2 \, dx$$

$$= \underbrace{\frac{1}{12} x^3}_{\text{Stamm-funktion}} \Big|_1^2$$

$$= \underbrace{\frac{1}{12} \cdot 2^3}_{F(b)} - \underset{F(a)}{\frac{1}{12} \cdot 1^3}$$

$$= \frac{8}{12} - \frac{1}{12} = \underline{\frac{7}{12}} \quad (\text{FE'en})$$

2. Beispiel



$$A \overset{!}{=} \int_1^2 -\frac{2}{x^2}\,dx$$

$$= \frac{2}{x}\Big|_1^2$$

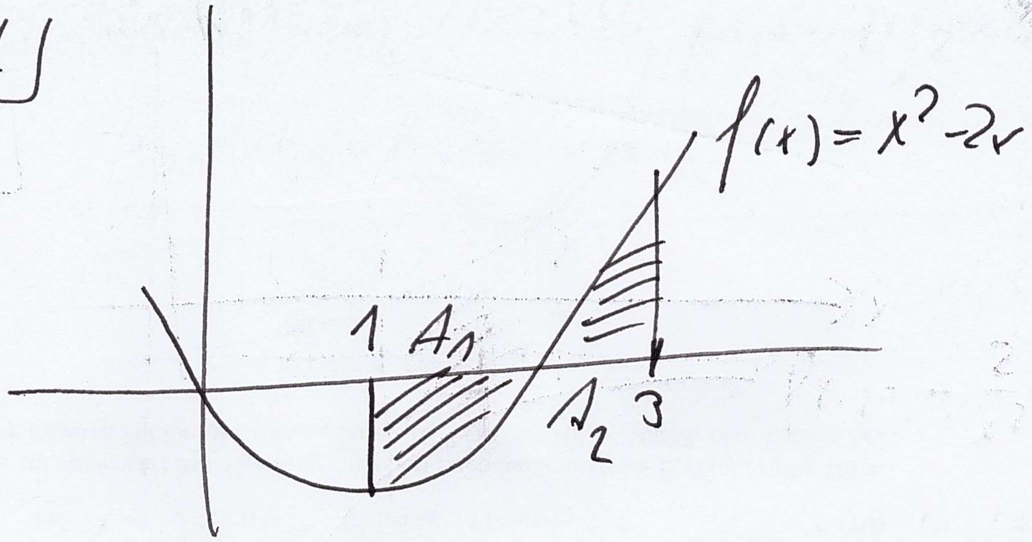
$$= \frac{2}{2} - \frac{2}{1} = 1 - 2 \overset{!}{=} -1$$

18

also $A = +1$ FE[en]

Merke: Flächenstücke <u>unterhalb</u> der x-Achse <u>müssen stets gesondert berechnet</u> werden.

3. Beispiel



Vorüberlegung Die Nullstelle muß berechnet werden:

$$f(x) = x^2 - 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x-2) = 0 \quad x_1 = 0 \quad \underline{\underline{x_2 = 2}}$$

$$A_1 : \int_1^2 (x^2 - 2x)\,dx \qquad A_2 : \int_2^3 (x^2 - 2x)\,dx$$

"getrennte" Integrale, weil die Flächen "getrennt" oberhalb und unterhalb der x-Achse liegen

$$A_1 : \int_1^2 (x^2 - 2x)\,dx$$

$$= \frac{1}{3}x^3 - x^2 \Big|_1^2$$

$$= \left[\frac{1}{3} \cdot 2^3 - 2^2\right] - \left[\frac{1}{3} \cdot 1^3 - 1^2\right]$$

$$F(b) \quad - \quad F(a)$$

$$= \frac{8}{3} - 4 \quad - \frac{1}{3} + 1$$

beliebte Fehlerquelle

$$= \frac{7}{3} - 3$$

$$= \frac{7-9}{3} = -\frac{2}{3} \qquad \underline{A_1 = +\frac{2}{3}\ FE^2}$$

$$A_2: \int_2^3 x^2 - 2x$$

$$= \frac{1}{3}x^3 - x^2 \Big|_2^3$$

$$= \left[\frac{1}{3} \cdot 3^3 - 3^2\right] - \left[\frac{1}{3} \cdot 2^3 - 2^2\right]$$

$$= \frac{27}{3} - 9 - \frac{8}{3} + 4$$

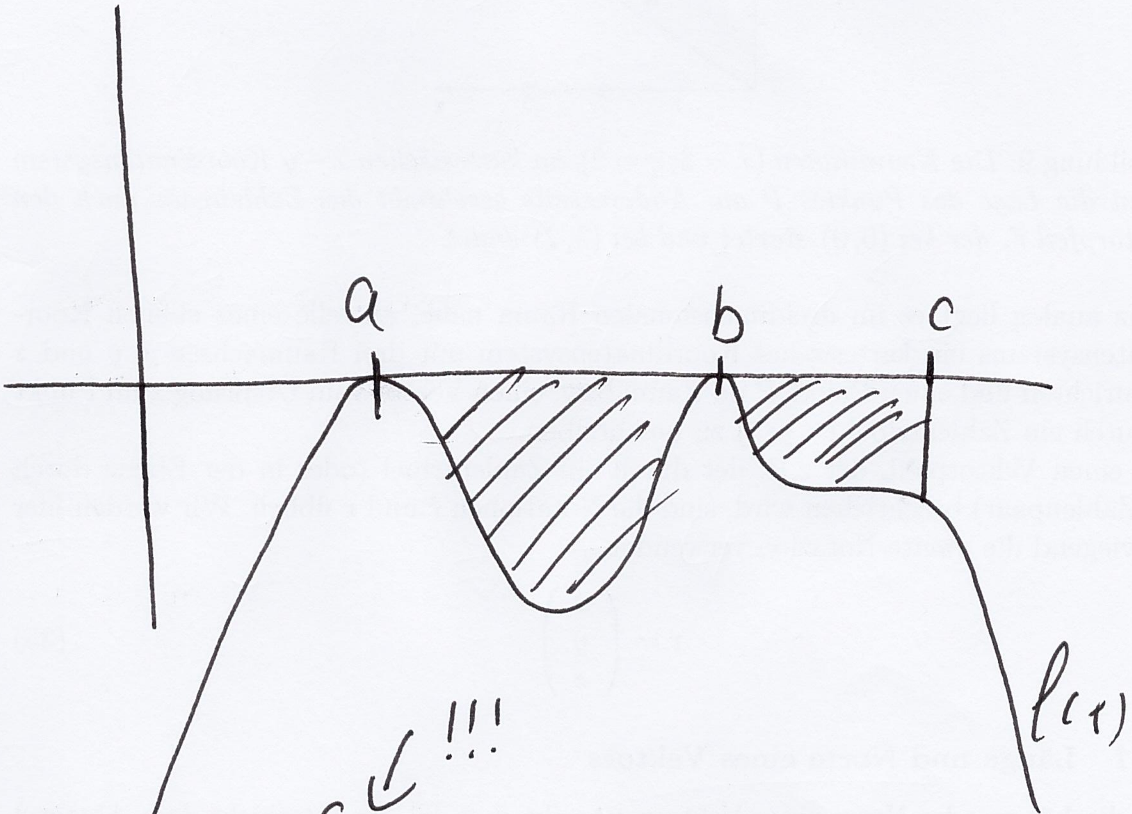
$$= \frac{21}{3} - 5$$

$$= \frac{21 - 15}{3} = \frac{6}{3} = 2 \qquad \underline{\underline{A_2 = +2 \text{ FE}^2\text{e}}}$$

$$A_{Gesamt} = A_1 + A_2$$

$$= +\frac{2}{3} + 2 = \underline{\underline{+2\frac{2}{3} \text{ FE}[\text{eu}]}}$$

4. Beispiel [Liegen 2 oder mehr Flächen aneinandergereiht unterhalb der x-Achse, so genügt „1 Integral]



!!!

$$A_G \Longleftrightarrow \int_a^c f(x)\,dx$$

Mehr dazu später

Ausblick Vielfältig beantworten Aufgaben komplett vorgerechnet.