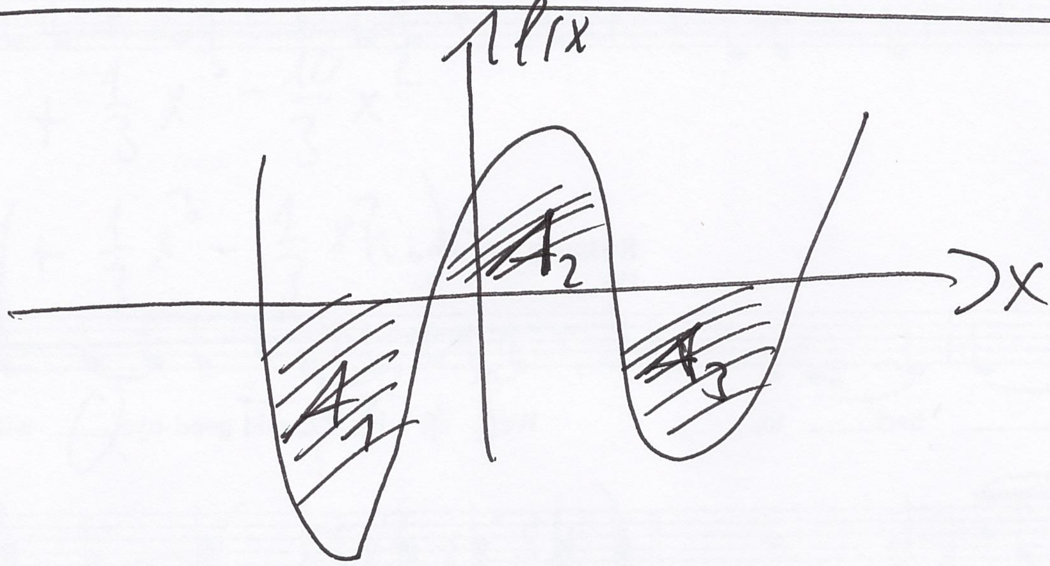
467 Flächen zwischen Nullstelle

Berechne den endlichen Flächeninhalt zwischen x-Achse und $f(x) = \frac{1}{3}x^4 - \frac{10}{3}x^2 + 3$.

Wir benutzen Geogebra und zeichnen f(x):



Analyse: A_1 (unterhalb) A_2 (oberhalb) A_3 (unterhalb) müssen (!) einzeln berechnet werden

Dazu werden die Nullstellen von f(x) benötigt:

$$\frac{1}{3}x^4 - \frac{10}{3}x^2 + 3 = 0$$

Probieren: $x = 1$

$$f(1) = \frac{1}{3} \cdot 1^4 - \frac{10}{3} \cdot 1^2 + 3$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{10}{3} + 3 = 0$$

olynomdivision:

$$\left[\frac{1}{3}x^4 - \frac{10}{3}x^2 + 3\right] : \left[x - 1\right] = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}x^2 - 3x - 3$$

$$-\left(\frac{1}{3}x^4 - \frac{1}{3}x^3\right)$$

$$0 \quad + \frac{1}{3}x^3 - \frac{10}{3}x^2$$

$$-\left(+\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}x^2\right)$$

$$0 \quad - \frac{9}{3}x^2 + 3$$

$$-\left(-3x^2 + 3x\right)$$

$$0 \quad -3x + 3$$

$$\left(-3x + 3\right)$$

$$\underline{\underline{0}}$$

Restpolynom

$$r(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}x^2 - 3x - 3 \overset{?}{=} 0$$

Probieren: $x = -1$

$$-\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + 3 - 3 = 0$$

Polynomdivision:

$$\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{3}x^2-3x-3\right] : \left[x \overset{!!}{+} 1\right] = \frac{1}{3}x^2-3$$

$$-\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{3}x^2\right]$$

$$0 \quad -3x-3$$

$$-(-3x-3)$$

$$\underline{\underline{0}}$$

2. Restpolynom

$$s(x) = \frac{1}{3}x^2 - 3 \overset{?}{=} 0 \quad | +3$$

$$\frac{1}{3}x^2 = 3 \quad | \cdot 3$$

$$x^2 = 9 \quad | \sqrt{\;}$$

$$x_1 = +3 \quad x_2 = -3$$

Gesamtergebnis

Nullstellen bei 3

$$x_1 = -3 \quad x_2 = -1 \quad x_3 = +1 \quad x_4 = +3$$

Etwas weniger Rechenarbeit: $f(x)$ ist achsensymmetrisch wegen $f(x) = f(-x)$

Gesamtfläche

$$A = A_1 + \underset{\text{Unterhalb!!}}{A_2} + A_3$$

$$A_1 \overset{!}{=} -\int_{-3}^{-1} f(x)\,dx \qquad A_2 = +\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$$

$$A_3 \overset{!}{=} -\int_{1}^{3} f(x)\,dx$$

Zur Übung lassen wir einmal die Symmetriebetrachtungen beiseite und berechnen alle 3 Integrale:

www.raphael-biere.de

A_1: $\displaystyle\int_{-3}^{-1} f(x)\,dx = \int_{-3}^{-1}\left(\frac{1}{3}x^4 - \frac{10}{3}x^2 + 3\right)dx$

f' $\quad = \underbrace{\frac{1}{15}x^5 - \frac{10}{9}x^3 + 3x}_{\text{Stammf.}}\Big|_{-3}^{-1}$

$$= \underbrace{\left[\frac{1}{15}\cdot(-1)^5 - \frac{10}{9}(-1)^3 + 3\cdot(-1)\right]}_{\text{obere Grenze}} - \underbrace{\left[\frac{1}{15}(-3)^5 - \frac{10}{9}(-3)^3 + 3(-3)\right]}_{\text{untere Grenze}}$$

$= \underline{\underline{-6{,}76}}$ (TR)

A_2: $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \underbrace{\frac{1}{15}x^5 - \frac{10}{9}x^3 + 3x}_{\text{Stammf}}\Big|_{-1}^{1}$

$$= \left[\frac{1}{15} - \frac{10}{9} + 3\right] - \left[-\frac{1}{15} + \frac{10}{9} - 3\right]$$

$= \underline{\underline{3{,}91}}$ (TR)

A_3: $\displaystyle\int_{1}^{3} f(x)\,dx = \left[\frac{1}{15}\cdot 3^5 - \frac{10}{9}\cdot 3^3 + 3\cdot 3\right] - \left[\frac{1}{15} - \frac{10}{9} + 3\right]$

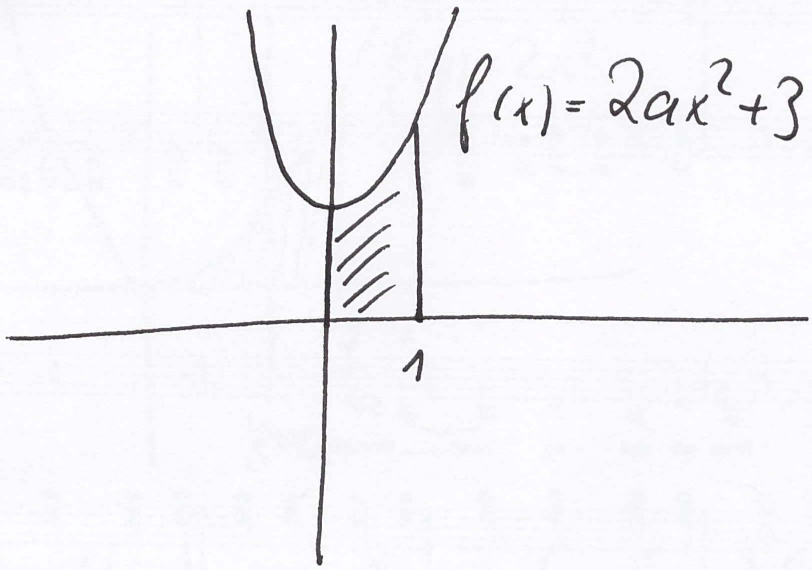
$= \underline{\underline{-6{,}76}}$

5

$A_G = -A_1 + A_2 - A_3$

$= +6{,}76 + 3{,}91 + 6{,}76 = 17{,}43$ FE

Einfache Parameteraufgabe mit Integral: Beispiel 1



Wie muß $a > 0$ gewählt werden, damit

$$\int_0^1 (2ax^2+3)\,dx = 5 \quad \text{gilt?}$$

Lösung

$$\int_0^1 (2ax^2+3)\,dx = 5$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{2}{3}ax^3 + 3x \Big|_0^1 = 5$$

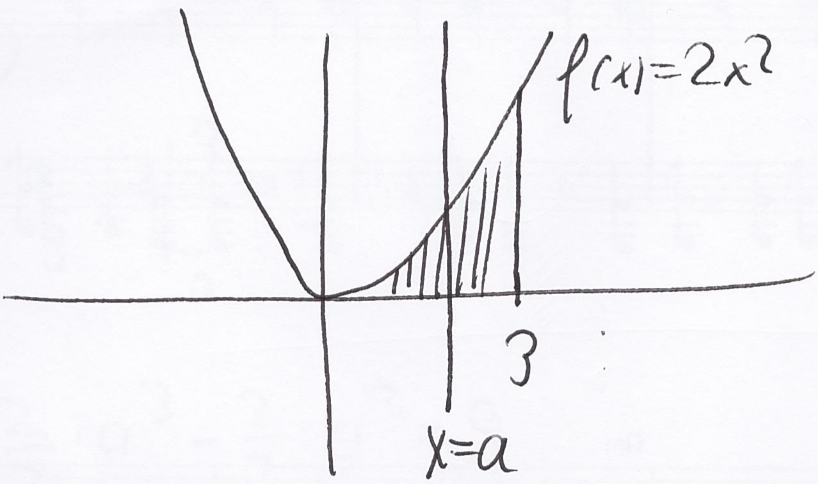
$$\Leftrightarrow \left[\frac{2}{3}a + 3\right] - \left[\frac{2}{3}a\cdot 0 + 3\cdot 0\right] = 5$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3}a + 3 = 5 \qquad \Big| -3$$

$$\frac{2}{3}a = 2 \qquad \Big| \cdot\frac{3}{2}$$

$$\underline{\underline{a = 3}}$$

Einfache Parameteraufgabe mit Integral: 2. Beispiel



$x=a$ soll die schraffierte Fläche halbieren

Ansatz $A_G=\int_0^3 2x^2\,dx = \frac{2}{3}x^3\Big|_0^3$

$= \frac{2}{3}\cdot 27 - \frac{2}{3}\cdot 0^3 = 18\,FE$

$\frac{1}{2}A_G = 9$

$9=\int_0^a f(x)\,dx$ oder $9=\int_a^3 f(x)\,dx$

www.raphael-biere.de

wir wählen

$$\int_0^a 2x^2 dx = 9$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3}x^3\Big|_0^a = 9$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3}\cdot a^3 - \frac{2}{3}\cdot 0^3 = 9$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3}\cdot a^3 = 9 \quad \Big| \cdot \frac{3}{2}$$

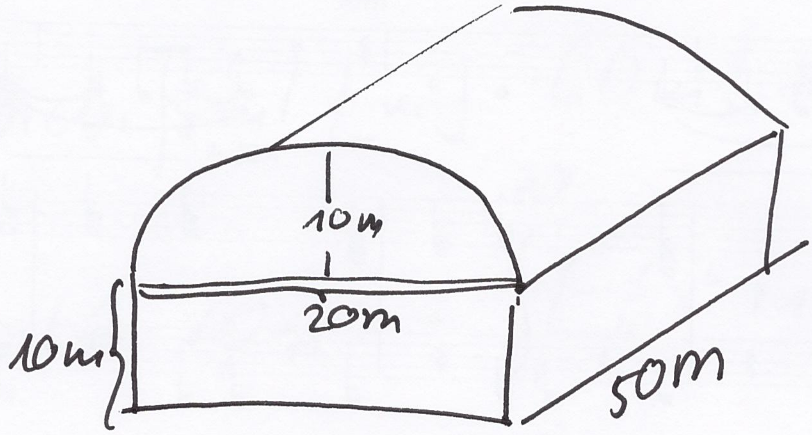
$$\Leftrightarrow a^3 = \frac{27}{2}$$

$$a = +\sqrt[3]{\frac{27}{2}} \quad \text{mit } a > 0$$

www.raphael-brere.de

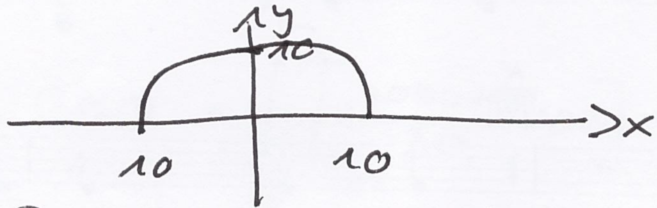
Anwendungsaufgabe zur Integralrechnung

Beispiel



Die oben abgebildete Werkshalle wird mit einer Belüftungsanlage betrieben, die $60\,m^3/min$ Leistung aufweist!
Wann ist die Luft einmal komplett ausgetauscht?

Lösung



Gleichung der Dach„parabel"

$$y = ax^2 + 10 \qquad \text{z.B. } (10|0)\ (-10|0)$$

$$0 = 100a + 10 \Rightarrow a = -\frac{1}{10}$$

$$y = -\frac{1}{10}x^2 + 10$$

Volumen der Halle V_H:

V_H = Vorderfront [m^2] · 60 m [Höhe]

Vorderfront $\hat{=} 10 \cdot 20 + \int_{-10}^{10} \left[-\frac{1}{10}x^2 + 10\right] dx$

oder mit „Symmetrie"

$= 200 + \left[-\frac{1}{30}x^3 + 10x \Big|_{-10}^{10} \right]$

$= 200 + \left[\left[-\frac{1000}{30} + 100 \right] - \left[+\frac{1000}{30} - 100 \right] \right]$

$= 200 + \left[200 - \frac{2000}{30} \right]$

$= \frac{1000}{3} = 333\frac{1}{3}$

$V_H = 333\frac{1}{3} \cdot 60 \; [m^3] = 20.000 \, m^3$

$60 \, m^3/min \longrightarrow \frac{20.000}{60} \, min = \frac{1000}{3} \, min$

$\approx 333 \, min$

Ausblick: Flächen zwischen 2 Graphen

10