

# Anwendungsbeispiele zur Integration

476

Die Geschwindigkeit  $v(t)$  eines Autos, vom  
Fahrteuschreiber aufgezeichnet, wird darge-  
stellt durch  $v(t) = -\frac{1}{2}t^2 + 12t$

(a) Bestimme die Weg-Zeit-Funktion

(b) Ermittle die zurückgelegte Strecke.

(a) Wegen  $v(t) = s'(t)$  ist  $s(t) = \int v(t) dt$

$$\begin{aligned} s(t) &= \int v(t) dt = \int \left(-\frac{1}{2}t^2 + 12t\right) dt \\ &= -\frac{1}{6}t^3 + 6t^2 + \underline{\underline{C}} \end{aligned}$$

Wegen  $t=0: s(0) = 0$  [Das Fahrzeug startet aus  
dem Stand] ist  $C = 0$

$$\underline{\underline{s(t) = -\frac{1}{6}t^3 + 6t^2}}$$

(1)

b) Die Fahrt ist zuende, wenn  $v(t)=0$  ist

$$v(t) = -\frac{1}{2}t^2 + 12t = 0$$

$$\Leftrightarrow t \left( -\frac{1}{2}t + 12 \right) = 0 \quad t_1 = 0$$
$$t_2 = 24$$

Die gesamte Fahrstrecke ist also

$$s(24) = 1152 \text{ m}$$

2. Beispiel Ein Flüssigkeitsbehälter in Form eines Zylinders [ $h=3\text{m}$   $r=0,6\text{m}$ ] hat ein Loch: der Wasserstand sinkt ab mit der Geschwindigkeit  $h'(t) = \frac{1}{54}t - \frac{10}{3}$  [ $\frac{\text{cm}}{\text{min}}$ ]

- a) Wie hoch ist der Wasserstand nach 90 min?  
b) Wie viel Wasser ist insgesamt ausgelaufen?

Zu a) Wir leuchten  $h(t)$ :

$$h(t) = \int h'(t) dt = \int \left( \frac{1}{54}t - \frac{10}{3} \right) dt$$
$$= \frac{1}{108}t^2 - \frac{10}{3}t + C$$

Wegen  $h(0) = 3\text{m}$  [ausgepumpter Zustand]

$$\text{ist } h(0) = \frac{1}{108} \cdot 0^2 - \frac{10}{3} \cdot 0 + C = 300 \quad C = 300$$

$$h(t) = \frac{1}{108}t^2 - \frac{10}{3}t + C$$

Nach 90 min ist

$$h(90) = \frac{1}{108} \cdot 90^2 - \frac{10}{3} \cdot 90 + 300 = \underline{\underline{75\text{cm}}}$$

Da der Wasserstand auf 75 cm abgesunken  
ist, und der gesamte Wasserverlust beschreiben  
durch das Volumen eines Zylinders mit  $r = 30 \text{ cm}$   
und  ~~$h = 300$~~   $\bar{h} = 225 \text{ cm} [300 \text{ cm} - 75 \text{ cm}]$

also

$$V = \pi r^2 h = \pi \cdot 30^2 \cdot 225 \approx 636 \text{ Liter}$$

ausbleibe Tuberkulose aus der

plus Vekt!