Produktintegration
[auch „partielle" Integration"]

aus der Differentialrechnung

$$[u \cdot v]' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

Integration liefert

$$\int [u \cdot v]' = \int u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$\Leftrightarrow \quad u \cdot v = \int u' \cdot v + \int u \cdot v'$$

oder $\boxed{u \cdot v - \int u \cdot v' = \int u' v}$

oder $\boxed{u \cdot v - \int u' \cdot v = \int u \cdot v'}$

$$\int u' \cdot v = u \cdot v - \underbrace{\int u \cdot v'}_{\text{„Restintegral" muß „einfacher sein" als das „Ausgangsintegral"}}$$

1. Beispiel

$$\int \underset{u'}{e^x} \cdot \underset{v}{x} \, dx$$

$$= \underset{u}{e^x} \cdot \underset{v}{x} - \underbrace{\int \underset{u}{e^x} \cdot \underset{v'}{1}}_{\text{Restintegral ist einfacher als Ausgangsintegral}}$$

$$\underline{\underline{= e^x - x - e^x + C}}$$

2

Beispiel „Irrweg"

$$\int \underbrace{x}_{u'} \cdot \underbrace{\cos x}_{v} = \underbrace{\tfrac{1}{2}x^2}_{u} \cdot \underbrace{\cos x}_{v} - \underbrace{\int \underbrace{\tfrac{1}{2}x^2}_{u} \cdot (-\sin x)}_{\text{Restintegral}}$$

Restintegral ist nicht einfach

= Man rechnet nicht weiter, weil das Restintegral „komplizierter" wird

B. Beispiel

$$\int x \cdot \cos x \overset{!}{=} \int \underset{u'}{(\cos x)} \cdot \underset{v}{x}$$

$$= \underset{u}{(\sin x)} \cdot \underset{v}{x} - \underbrace{\int (\sin x) \cdot \underline{1}}_{\text{Restintegral ist einfach}}$$

$$= (\sin x) \cdot x - (-\cos x) + C$$

$$= x \cdot \sin x + \cos x + C$$

4. Beispiel „Zweimalige" Produktintegration

$$\int \underbrace{e^x}_{u'} \cdot \underbrace{x^2}_{v} = \underbrace{e^x}_{u} \cdot \underbrace{x^2}_{v} - \underbrace{\int \underbrace{e^x}_{u} \cdot \underbrace{2x}_{v'}}_{\text{Restintegral ist einfacher}}$$

Nebenrechnung

$$\int \underset{u'}{e^x} \cdot \underset{v}{2x} = e^x \cdot 2x - \int e^x \cdot 2$$

$$= e^x \cdot 2x - 2\int e^x$$

$$= e^x \cdot 2x - 2e^x$$

$$\int e^x \cdot x^2 = e^x \cdot x^2 - \int e^x \cdot 2x$$

$$= e^x \cdot x^2 - \underbrace{\left[e^x \cdot 2x - 2e^x \right]}_{\text{a.d. Nebenrechnung}}$$

$$= x^2 \cdot e^x - 2x e^x + 2 e^x + C$$

beliebteste Fehlerquelle

5. Beispiel) Der „Kniff mit der 1"

$$\int \ln x \, dx \overset{!}{=} \int \underbrace{1}_{u'} \cdot \underbrace{\ln x}_{v}$$

$$= \underbrace{x}_{u} \cdot \underbrace{\ln x}_{v} - \int x \cdot \frac{1}{x}$$

$$= x \cdot \ln x - \int 1$$

$$= x \cdot \ln x - x + C$$

6. Beispiel | Der Kniff mit „Phoenix aus der Asche"

$$\int \underbrace{\sin x}_{u'} \cdot \underbrace{\cos x}_{v} = \underbrace{-\cos x}_{u} \cdot \underbrace{\cos x}_{v} - \int \underbrace{-\cos x}_{u} \cdot \underbrace{(-\sin x)}_{v'}$$

$$\overset{!}{=} -\cos^2 x - \int \cos x \cdot \sin x$$

$$\overset{!}{=} -\cos^2 x - \int \sin x \cos x$$

Man schreibt dieses „Zwischenergebnis" als neue Gleichung auf:

$$\int \sin x \cos x = -\cos^2 x - \int \sin x \cos x \quad \Big| + \int \sin x \cos x$$

$$2 \cdot \int \sin x \cos x = -\cos^2 x \quad \Big| :2$$

$$\int \sin x \cos x = \underline{\underline{-\frac{1}{2}\cos^2 x + C}}$$

Stichpunktartige Zusammenfassung

Die „Produktintegration" versucht man, wenn ein „Produkt von Funktionen" integriert werden soll.

Die „Formeln"

$$\int u' \cdot v = u \cdot v - \int u \cdot v'$$

$$\int u \cdot v' = u \cdot v - \int u' v$$

sind gleichwertig; man sollte sich nur „eine" merken

Ist das Restintegral „komplizierter" als das Ausgangsintegral, beginnt man von vorn mit vertauschten Faktoren!

Bei mehrfacher Anwendung der partiellen Integration empfiehlt es sich, Nebenrechnungen extra zu notieren.

Alle Unterlagen als pdf unter

www.raphael-bove.de

Ausblick: Schein substitution und „echte" Substitution