I Die „Schein"substitution (480)

Vorbemerkung $\left[f(g(x))\right]' = g'(x) \cdot f'(g(x))$

Kettenregel

Integriert man $\int \left[f(g(x))\right]' = \int g'(x) \cdot f'(g(x))$

$\Leftrightarrow \int g'(x) \cdot f'(g(x)) = f(g(x)) + C$

Die „Schein"substitutionsregel

Beispiel $\int (2x+3) \cdot e^{x^2+3x} \stackrel{!}{=} e^{x^2+3x} + C$

folgt sofort

oder

$\int 3x^2 \cdot \cos(x^3) \stackrel{!}{=} \sin(x^3) + C$

folgt sofort

od $\int 4x^3 \cdot (x^4+9)^5 = \frac{1}{6}(x^4+9)^6 + C_1$

!

od $\int x \cdot e^{x^2} = \boxed{\frac{1}{2}} \cdot e^{x^2} + C_1$

<u>Regel</u> Integrale der Form

$$\int g'(x) \cdot f'(g(x)) = f(g(x)) + C$$

Können <u>sofort</u> angegeben werden – bis auf ev. Hinzufügen eine Konstanten

$$\int x^2 \cdot \cos(x^3) = \boxed{\frac{1}{3}} \cdot \sin(x^3)$$

$$\int x^3 \cdot e^{2x^4} = \boxed{\frac{1}{8}} e^{2x^4}$$

usw

Beispiel) Die echte Substitution

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

Man sieht: Die innere Ableitung „$2x$" steht nicht da

Ziel: Die beiden x-Terme (!) x^2 und dx

so zu ersetzen, dass das neue Integral

erheblich (!) einfacher wird als das

alte

Dazu benötigt man:

Das Rechnen mit „Differentialen“

In der Differentialrechnung gilt die Schreibweise

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \doteq \frac{df}{dx} \quad \begin{array}{l} \longrightarrow \text{Differential} \\ \longrightarrow \text{Differential} \end{array}$$

Beispiel Sei $f(x) = x^2$

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = 2x \qquad | \cdot (dx)!$$

$$df = 2x\,dx$$

Beispiel Sei $f(z) = \sin z$ mit $z \doteq z(x)$

$$f'(z) = z' \cdot \cos z$$

$$f'(z) = \frac{dz}{dx} \cdot \cos z$$

Das Rechnen mit „Differentialen“

aus der Differenzialrechnung:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$$

also $f'(x) = \dfrac{dy}{dx}$ Differentiall

oder $f'(x)\,dx = dy$

$\boxed{\text{1. Beispiel}}$ $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ Die innere Ableitung $2x$ fehlt!!!

1) Wir „ersetzen“ x durch $\sin z$

2) Wir <u>müssen</u> auch dx ersetzen:

$x = \sin z$ | Ableiten nach x

$1 = z' \cdot \cos z$ | z' innere Ableitung, weil z von x abh. ist $z = z(x)$!

$1 = \dfrac{dz}{dx} \cdot \cos z$ | s.o.

$1\,dx = \cos z\,dz$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$ **1. echte Substitution**

Wir wissen $\sin^2 + \cos^2 = 1$

$\sin^2 = \underline{\underline{1-\cos^2}}$ Ähnlichkeit zu oben!

$\cos^2 = \underline{\underline{1-\sin^2}}$

Idee Wir ersuchen(!) die Substitution

$\cancel{x^2 = \sin^2 x}$

$$x = \sin z \qquad \text{mit } z = z(x)$$

Ableiten zum Berechnen von dx

$$1 = z' \cdot \cos z \qquad z' = \frac{dz}{dx}$$

$$1 = \frac{dz}{dx} \cdot \cos z \qquad \Big|\cdot dx$$

$$dx = dz \cdot \cos z$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 z}}\,\cos z \cdot dz$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{\cos^2 z}}\,\cos z\,dz$$

$$= \int \frac{\cos z}{\cos z}\,dz$$

$$= \int 1\,dz$$

$$= \underline{\underline{z + C}}$$

Rücksubstitution

$\sin z = x \quad | \arcsin$

$z = \arcsin(x)$

$$\overset{!}{=} \underline{\underline{\arcsin(x) + C}}$$

6

Beispiel „echte" Substitution

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

Wieder „fehlt" die innere Ableitung 2x. Wir substituieren „echt" und sehen

$$x = \tan z \qquad | \text{ ableiten, um } dx \text{ zu bestimmen}$$

$$x' = z' \cdot [\tan z]'$$

$$x' = \frac{dz}{dx} \cdot \left[\frac{\sin z}{\cos z}\right]'$$

$$x' = \frac{dz}{dx} \cdot \left[\frac{\cos^2 z + \sin^2 z}{\cos^2 z}\right]$$

$$1 = \frac{dz}{dx} \cdot \left[\frac{1}{\cos^2 z}\right] \qquad | \cdot dx$$

$$dx = \frac{1}{\cos^2 z}\,dz$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

$$= \int \frac{1}{1+\tan^2 z} \cdot \frac{1}{\cos^2 z}\,dz$$

$$= \int \frac{1}{\left(1+\frac{\sin^2}{\cos^2}\right)\cdot \cos^2}\,dz$$

$$= \int \frac{1}{\cos^2 + \sin^2}\,dz$$

$$= \int \frac{1}{1}\,dz$$

$$= z + C$$

Wegen $\tan z = x$ ist $z = \arctan(x)$

$$\underline{\underline{= \arctan(x) + C}}$$

4

5. Beispiel | „echte" Substitution

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}\,dx$$

[Die innere Ableitung ($4x^3$) fehlt!]

Wir sehen $\boxed{x^2 = \sin z}$

Berechnung von dx:

$$x^2 = \sin z \quad | \text{ Ableiten nach } x$$

$$2x\cancel{d} = \cancel{d}z' \cdot \cos z$$

$$2x = \frac{dz}{dx} \cdot \cos x \quad | \cdot dx$$

$$2x\,dx = \cos z\,dz \quad | \text{ Auflösen nach } x\,dx$$

$$x\,dx = \frac{1}{2} \cos z\,dz$$

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^4}}$$

$$= \int \frac{\frac{1}{2}\cos z\,dz}{\sqrt{1-(\sin z)^2}} \qquad \left|\; \begin{array}{l} x^2 = \sin z \\ x^4 = (x^2)^2 = (\sin z)^2 \end{array}\right.$$

$$= \int \frac{\frac{1}{2}\cos z\,dz}{\sqrt{(\cos z)^2}}$$

$$= \int \frac{\frac{1}{2}\cos z\,dz}{\cos z}$$

$$= \frac{1}{2}\int 1\,dz$$

$$= \frac{1}{2}\cdot z$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \sin z = x^2 \\ \Rightarrow \quad z = \arcsin(x^2) \end{array}}$$

$$= \frac{1}{2}\arcsin(x^2) + C$$

6

4) „echte" Substitution

$$\int \sqrt{9 - x^2}\, dx$$

„mal" fehlt" die innere Ableitung $(2x)$

Wir substituieren: $x \overset{!}{=} 3 \sin z(x)$

Wir berechnen dx

$$x = 3 \sin z \quad \Big| \, [\;]'$$

$$1 = z' \cdot 3 \cos z$$

$$1 = \frac{dz}{dx} \cdot 3 \cos z \quad \Big| \cdot dx$$

$$\underline{dx = 3 \cos z \, dz}$$

Wir tauschen aus

$$\int \sqrt{9-x^2}\, dx$$

$$= \int \sqrt{9-(3\sin z)^2}\; 3\cos z\, dz$$

$$= \int \sqrt{9-9\sin^2 z}\; 3\cos z\, dz$$

$$= \int \sqrt{9(1-\sin^2 z)}\; 3\cos z\, dx \qquad \left|\; \begin{array}{l} \sin^2 + \cos^2 = 1 \\ \cos^2 = 1-\sin^2 \end{array}\right.$$

$$= \int 3\sqrt{\cancel{9}\cos^2 z}\; 3\cos z\, dx$$

$$= \int 9 \cos^2 z\, dz$$

$$= 9 \cdot \underbrace{\int \cos z \cdot \cos z\, dz}_{\text{partielle Integration}}$$

$$\int \underset{u'}{\cos z} \cdot \underset{v}{\cos z}\, dz = \underset{u \cdot v}{\sin z \cdot \cos z} - \int \sin z \cdot (-\sin z)$$

$$= \sin z \cdot \cos z + \int \sin^2 z$$

$$= \sin z \cdot \cos z + \int 1 - \cos^2 z$$

$$= \sin z \cdot \cos z + \int 1 dz - \int \cos^2 z\, dz$$

$$= \sin z \cdot \cos z + z - \int \cos^2 z\, dz$$

$$\Longrightarrow$$

$$2 \int \cos^2 z\, dz = z + \sin z \cos z$$

$$\int \cos^2 z\, dz = \frac{1}{2} \cdot \left[z + \sin z \cos z \right] + C$$

Insgesamt ergibt sich

$$\int \sqrt{9-x^2}\, dx$$

$$= 9 \cdot \int \cos z^2\, dz$$

$$= 9 \cdot \frac{1}{2}\left[z + \sin z \cos z\right] + C$$

$x = 3 \sin z$

$\sin z = \frac{1}{3} x$

$\cos z = \sqrt{1 - \sin^2 z}$

$= \sqrt{1 - \frac{1}{9} x^2}$

$z = \arcsin\left(\frac{1}{3} x\right)$

$$= \frac{9}{2} \cdot \left[\arcsin\left(\frac{1}{3} x\right) + \frac{1}{3} x \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{9} x^2}\right] + C$$

Zum Knobeln

① $$\int \frac{1}{\sqrt{\sqrt{x}+1}}\,dx$$

② $$\int (\sin x \cdot \cos x)^3\,dx$$

③ $$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

④ Man beweise

$$A_{\text{Ellipse}} = \pi a b \quad \text{mit}$$

$$E:\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$