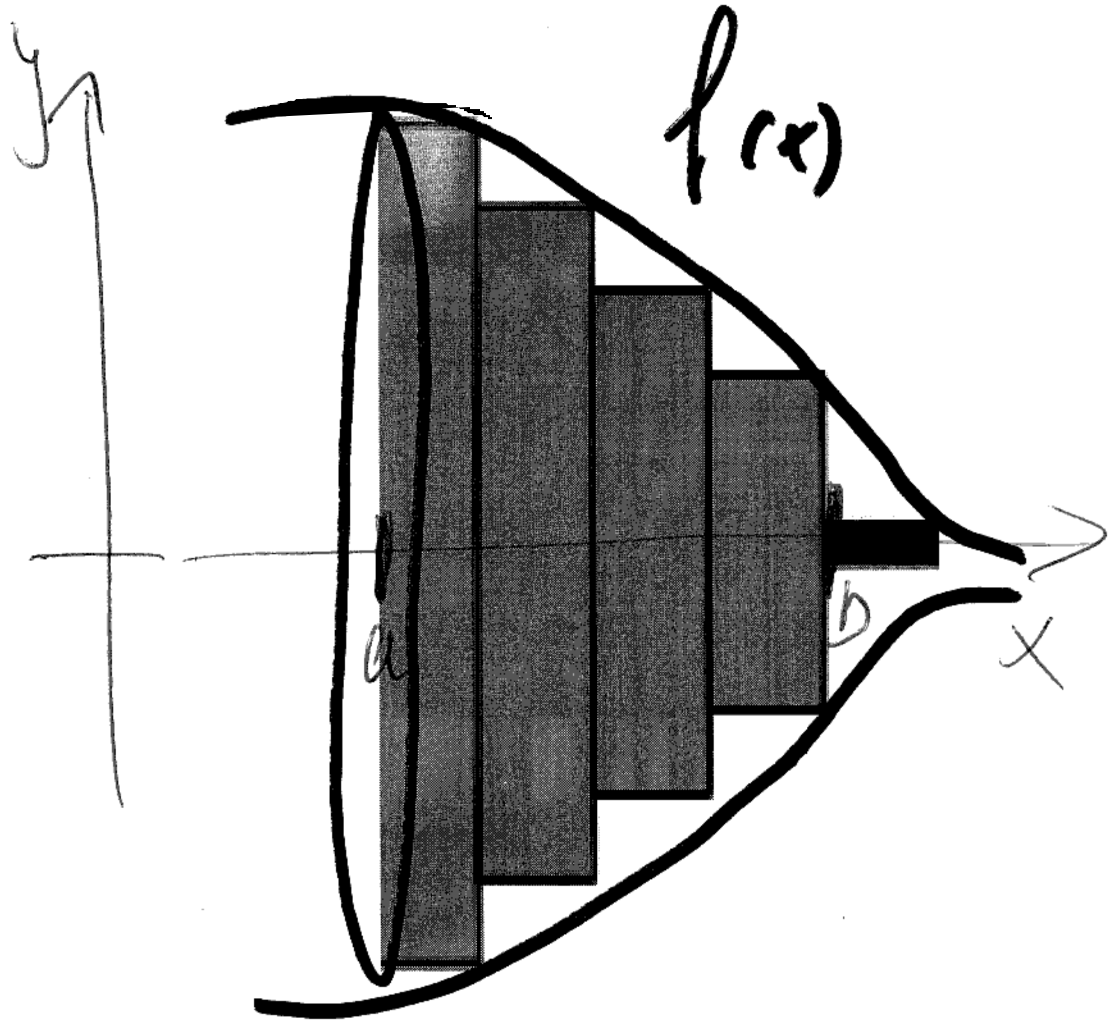
Rotationsvolumina



Überlegung:

- Der Körper wird „in Scheiben" geteilt
- jede „Scheibe" ist ein zylindrischer Körper

mit $V = G_i \cdot h$

$= \pi \cdot r_i^2 \cdot h$

$= \pi \cdot [f(x_i)]^2 \cdot h$

$= \pi \cdot [f(x_i)]^2 \cdot \Delta x$ Volumen der i-ten Scheibe

Analog zur Flächenberechnung / Ober-Untersumme ergänzen bzw. man:

→ Die „Anzahl der Scheiben n" strebe gegen ∞

$$\lim_{n \to \infty}$$

→ Die „Höhe Δx" werde „unendlich klein.

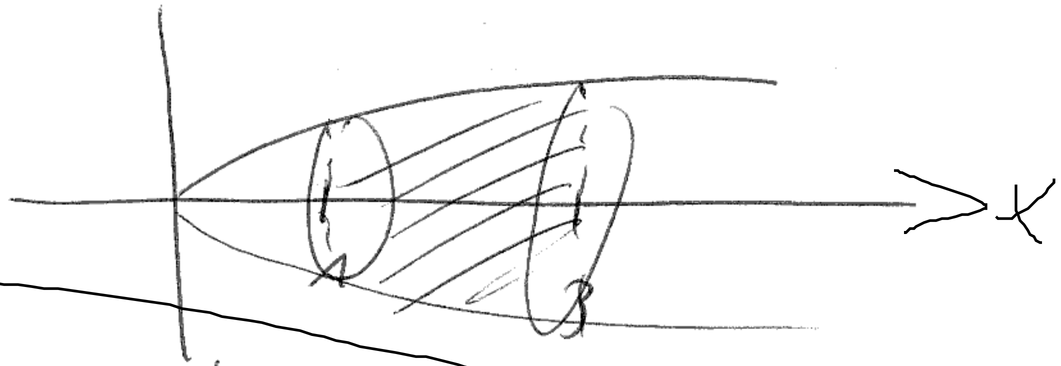
→ Innerhalb der Grenzen $[a, b]$ gilt dann

$$V_{\text{Rotationskörper}} = \pi \int_a^b [f(x)]^2 \, dx$$

(Rotationsformel)

Einfache Beispiele

1. Beispiel $f(x)=\sqrt{x}$ $[1;3]$



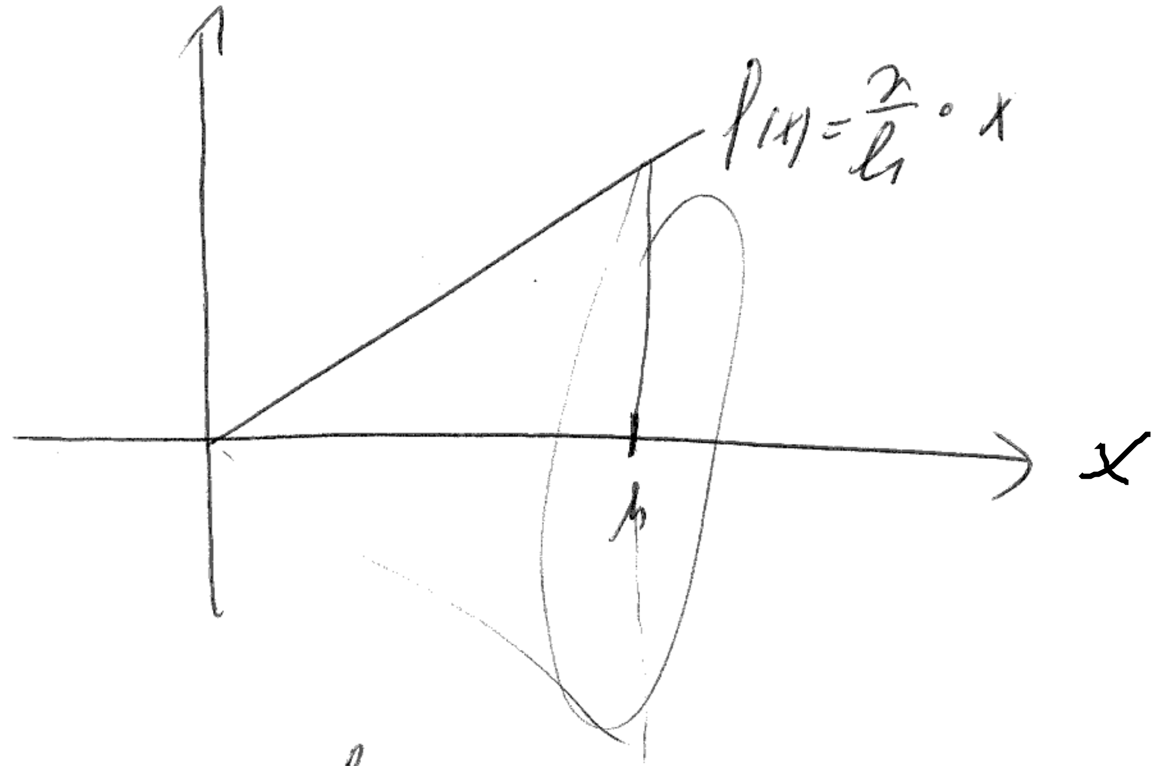
$$\boxed{V=\pi\cdot\int_a^b [f(x)]^2\,dx}$$

$$=\pi\cdot\int_1^3 [\sqrt{x}]^2\,dx$$

$$=\pi\cdot\int_1^3 x\,dx$$

$$=\pi\cdot\left[\frac{1}{2}x^2\Big|_1^3\right]=\pi\left[\frac{9}{2}-\frac{1}{2}\right]=\underline{\underline{4\pi\ VE}}$$

Beispiel Klassiker „Kegel" (4)



$$V_{Rot} = \pi \cdot \int_a^b [f(x)]^2 \, dx$$

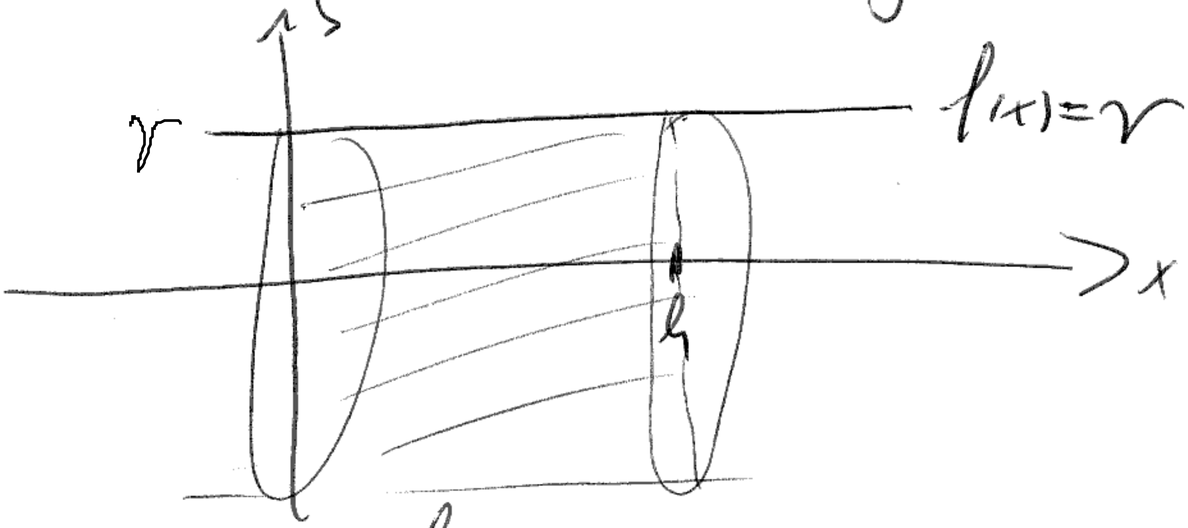
$$= \pi \cdot \int_0^h \left[\frac{r}{h} x\right]^2 dx$$

$$= \pi \cdot \int_0^h \frac{r^2}{h^2} x^2 \, dx$$

$$= \frac{\pi \cdot r^2}{h^2} \cdot \left[\frac{1}{3} x^3\right]_0^h = \frac{\pi r^2}{h^2} \cdot \left[\frac{1}{3} h^3 - \frac{1}{3} 0^3\right]$$

$$= \frac{\pi r^2 h^2}{3h} = \underline{\underline{\frac{1}{3} \pi r^2 h}}$$

Beispiel: Klassiker „Zylinder"



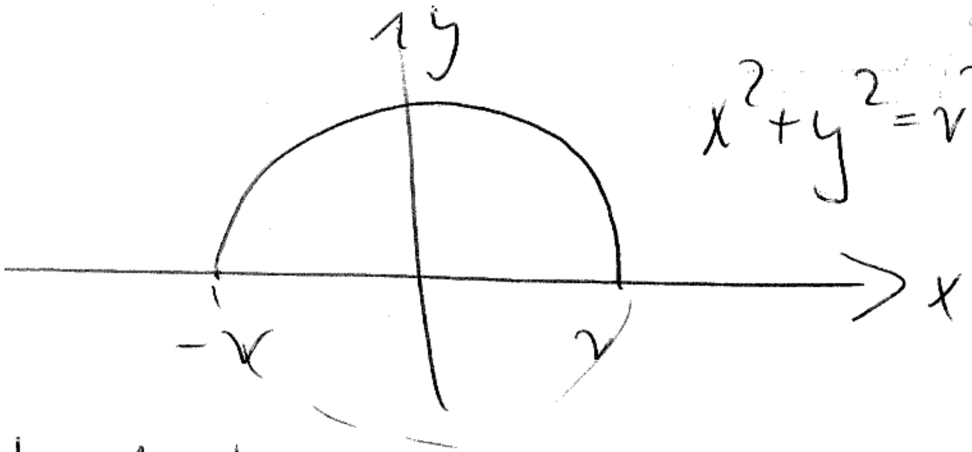
$$V_{Rot} = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx$$

$$= \pi \int_0^h r^2\,dx$$

$$= \pi \cdot \left[r^2 x \right]_0^h$$

$$= \pi \cdot \left[\underline{r^2 h} - \underline{r^2 \cdot 0} \right] = \underline{\underline{\pi r^2 h}}$$

[Beispiel] „Klassiker" Kugel



$x^2+y^2=r^2$

Vorbereitung: $x^2+y^2=r^2 \quad | -x^2$

$\underline{y^2 = r^2-x^2} \quad / \quad \underline{y = +\sqrt{r^2-x^2}}$

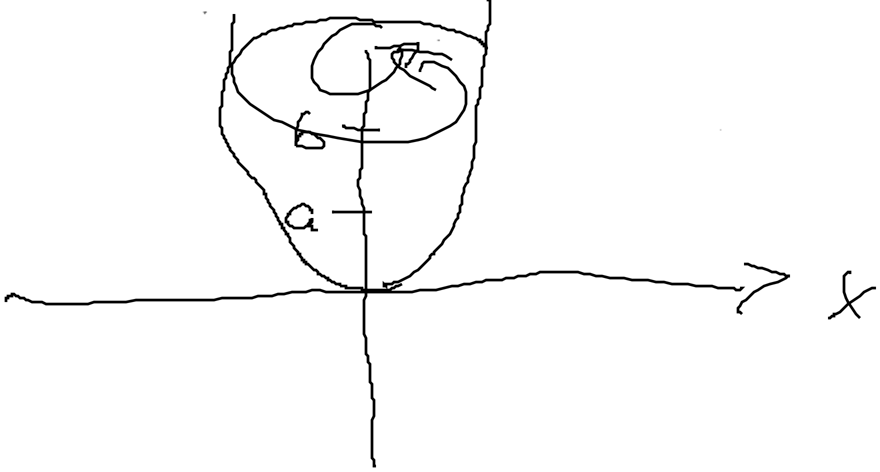
$$V_{Rot} = \pi \cdot \int_a^b f^2(x)\,dx$$

$$= \pi \cdot \int_{-r}^{r} (r^2-x^2)\,dx$$

$$= \pi \left[r^2 \cdot x - \frac{1}{3}x^3 \right]_{-r}^{r}$$

$$= \pi \left\{ \left(r^2 \cdot r - \frac{1}{3}r^3\right) - \left(-r^2 \cdot r - \frac{1}{3}(-r)^3\right) \right\}$$

$$= \pi \cdot \left\{ \frac{2}{3}r^3 + r^3 - \frac{1}{3}r^3 \right\} = \underline{\underline{\frac{4}{3}\pi r^3}}$$


b
a
x