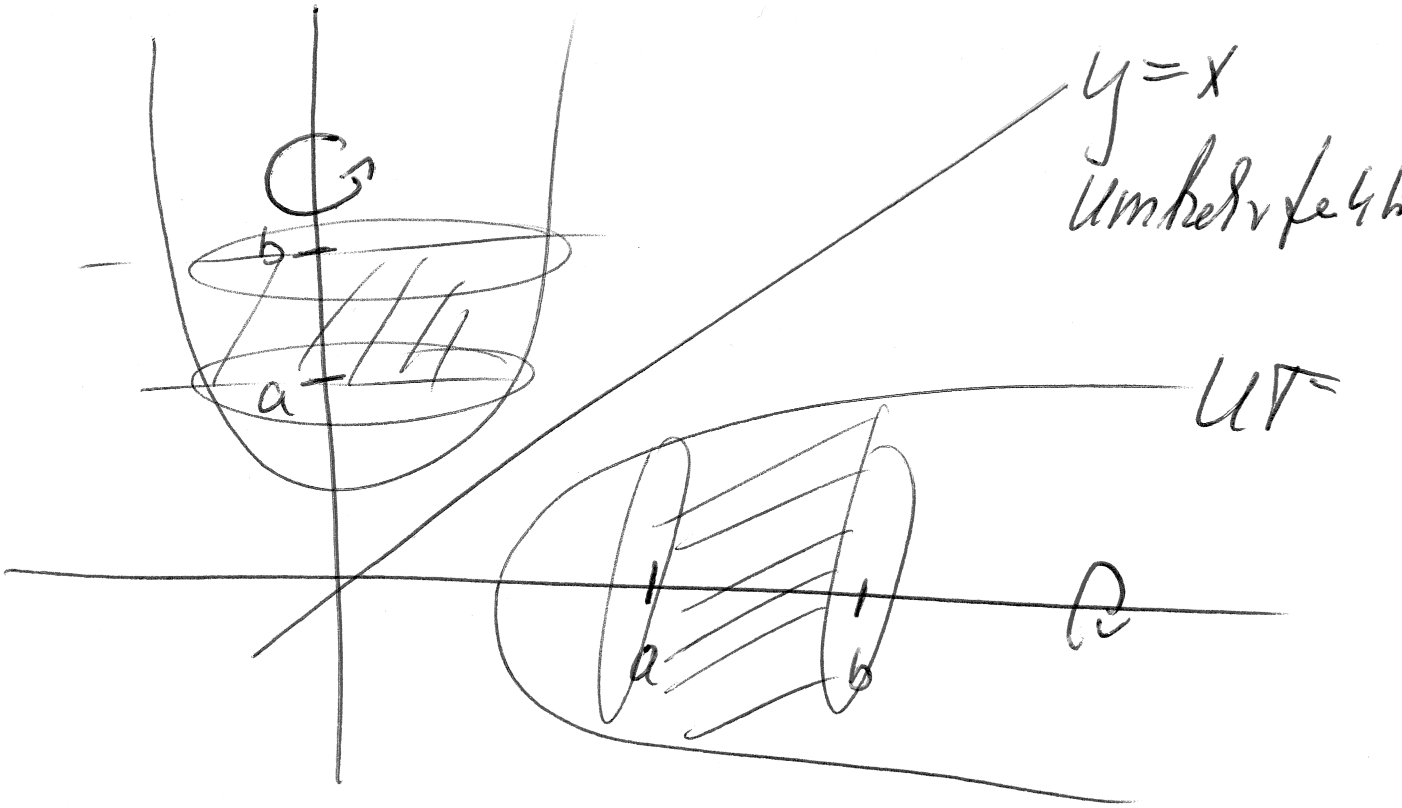
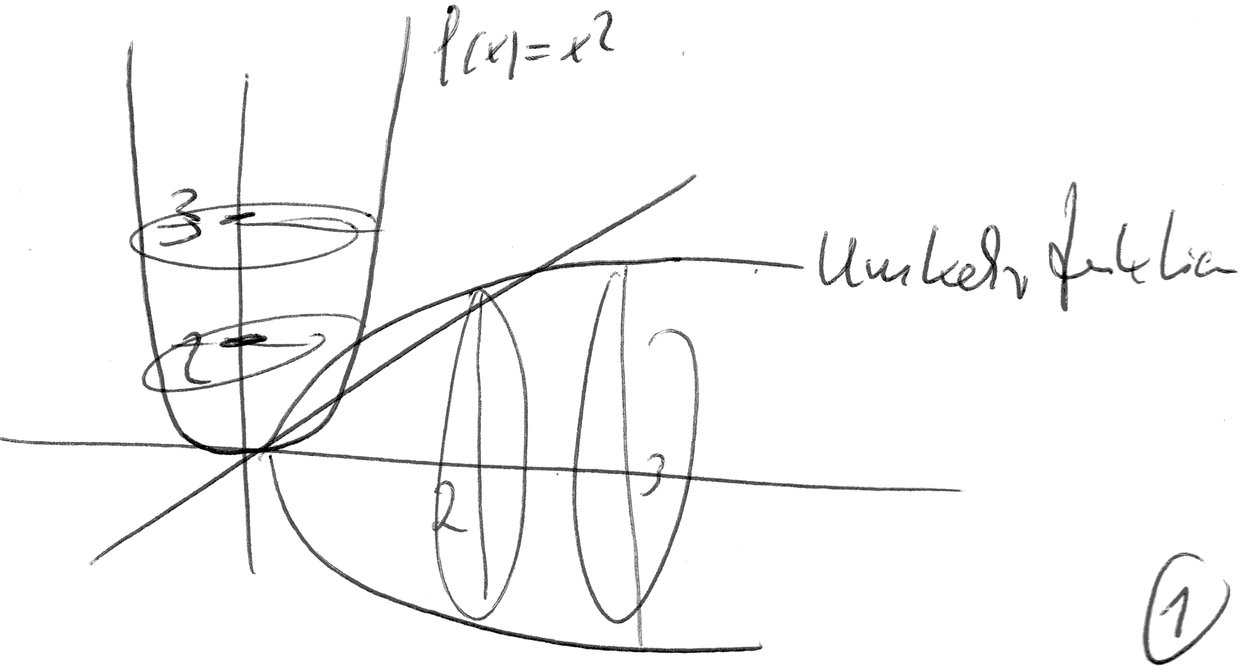
I

Rotation um die y-Achse



1. Beispiel $f(x) = x^2$

$y_1 = 2 \quad y_2 = 3$



Ermittlung der UF:

$$y = x^2 \xrightarrow{x=y} x = y^2$$

Auflösen nach y

$$x = y^2 \quad | \sqrt{\ }$$

$$y = +\sqrt{x}$$

$$V_R = \pi \cdot \int_a^b f^2(x)\,dx$$

$$= \pi \cdot \int_a^b \left[+\sqrt{x}\right]^2 dx = \pi \cdot \int_{a=2}^{b=3} \underline{x}\,dx =$$

$$= \pi \left[\frac{1}{2}x^2\right]_2^3 = \left[\frac{9}{2} - \frac{4}{2}\right]\pi = \underline{\underline{\frac{5}{2}\pi}} \quad \underline{VE_a}$$

2. Beispiel $f(x) = \frac{1}{4}x^2+1$ rotiert innerhalb der y-Werte $y_1 = 2$ $y_2 = 3$ um die y-Achse

Ermittlung der UF

$$y = \frac{1}{4}x^2+1 \xrightarrow{y=x} x = \frac{1}{4}y^2+1 \quad |-1$$

Auflösen nach „y^2"

$$x-1 = \frac{1}{4}y^2 \quad |\cdot 4$$

$$y^2 = 4x-4$$

$$V_R = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx$$

$$= \pi \int_2^3 (4x-4)\,dx = \pi \left[2x^2-4x\right]_2^3$$

$$= \pi \left[(18-12)-(8-8)\right]$$

$$= 6\pi \text{ VE}^3$$

③

Aufgaben

[Ausführliche Lösungen mit Erklärungen im nächsten Video]

(1) Die Fläche zwischen den Graphen von f und g rotiert innerhalb der Grenzen $[a, b]$ um die x-Achse!

Skizze!!

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \quad g(x) = \sqrt{x} \quad a = 1 \quad b = 9$

Beachte:

$$\pi \int (u^2 - v^2)\,dx \underset{\text{i.A}}{\neq} \cancel{\pi \int (u-v)^2\,dx}$$

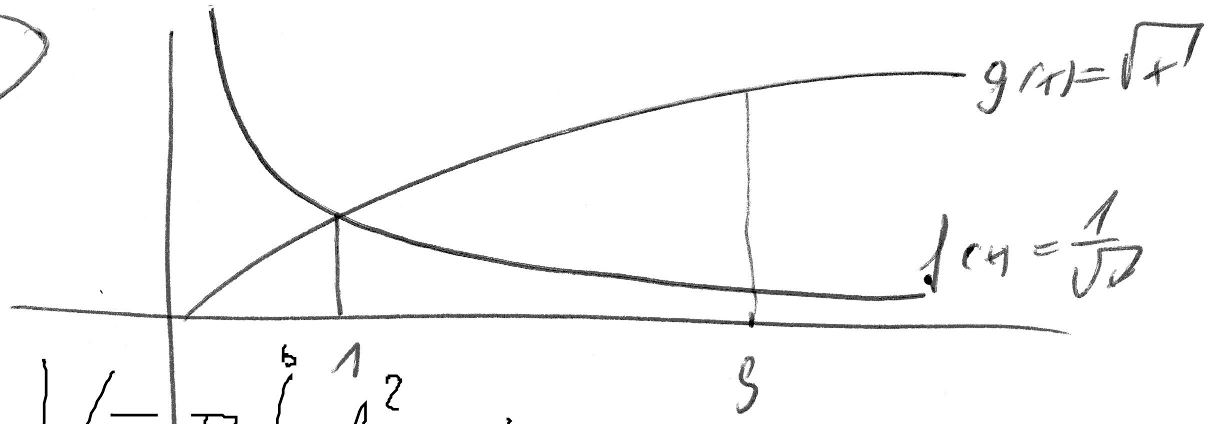
Warum?

2 Der Graph von f, die y-Achse und die Gerade y=a begrenzen eine nach oben offene Fläche, die um die y-Achse rotiert.
Untersuche das Volumen K des entstehenden Rotationskörpers.

$f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}}$ $a=2$

Lösungen 492

zu 1



$V = \pi \int_a^b f^2 \, dx$

$$V = \pi \cdot \int_1^9 \left[\sqrt{x}^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 \right] dx$$

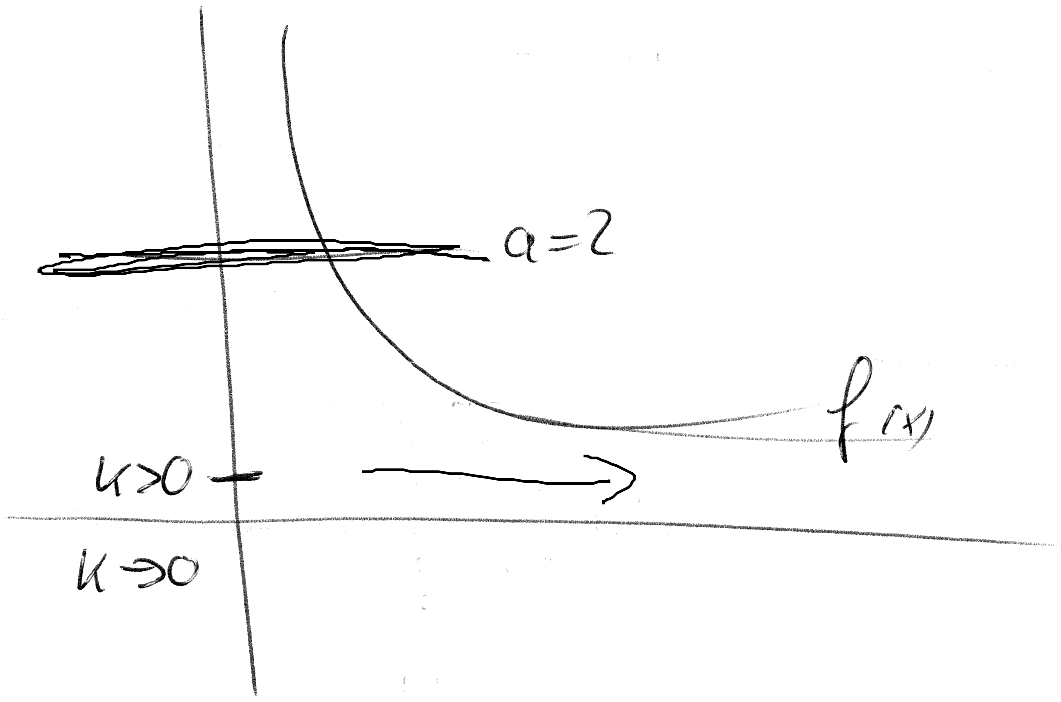
$$= \pi \int_1^9 \left(x - \frac{1}{x}\right) dx$$

$$= \pi \cdot \left[\frac{1}{2} x^2 - \ln x\right]_1^9$$

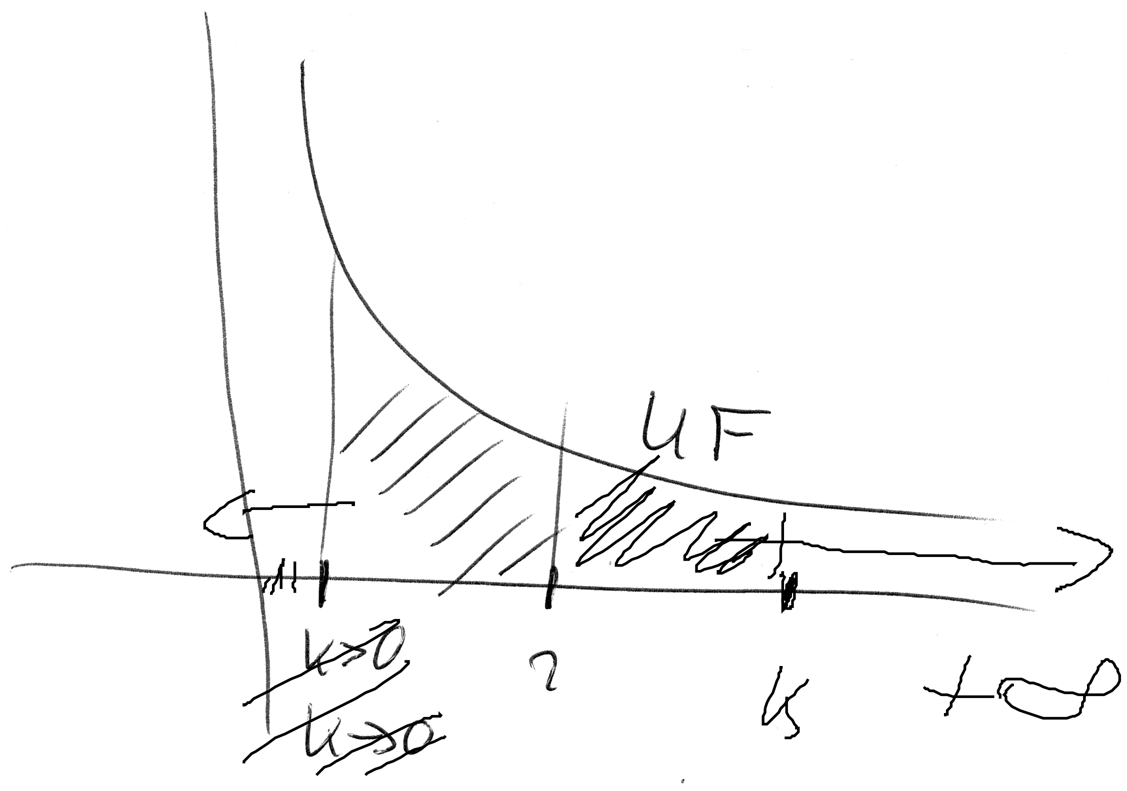
$$= \pi \cdot \left\{ \underbrace{\left(\frac{81}{2} - \ln 9\right)} - \underbrace{\left(\frac{1}{2} - \cancel{\ln 1}\right)} \right\}$$

$$= \pi \{40 - \ln 9\}$$ VE³

2 c)



Spiegelung an der y=x-Achse



Ermittlung der UF

$$y=\frac{2}{\sqrt{x}} \xrightarrow{y=x} x=\frac{2}{\sqrt{y}} \quad | \cdot\sqrt{y}$$

$$x\sqrt{y}=2 \quad | : x \neq 0$$

$$\sqrt{y}=\frac{2}{x} \quad | ()^2$$

$$y=\frac{4}{x^2}$$

$$V_2=\pi\cdot\int_a^b f^2(x)\,dx$$

$$=\pi\cdot\int_k^2 \left(\frac{4}{x^2}\right)^2 dx = \pi\int_k^2 16x^{-4}\,dx$$

$$=\pi\cdot\left[-\frac{16}{3}x^{-3}\right]_k^2$$

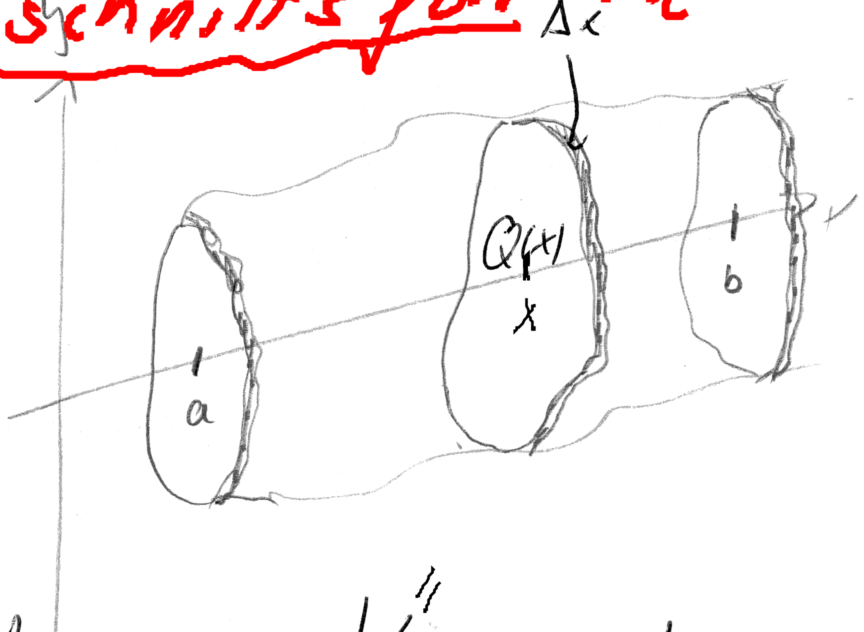
!!!!!!

$$=\pi\left[\underbrace{\left(-\frac{16}{3}(2)^{-3}\right)}-\underbrace{\left(-\frac{16}{3}(4)^{-3}\right)}\right]$$

$k \to 0$

$$=\pi\left[-\frac{16}{24}+\frac{16}{34^3}\right]=\pi\left[-\frac{2}{3}+\frac{16}{34^3}\right]$$

Querschnittsformel



Das Volumen von Körpern, die nicht rotationssymmetrisch sind, kann über die

Querschnittsformel

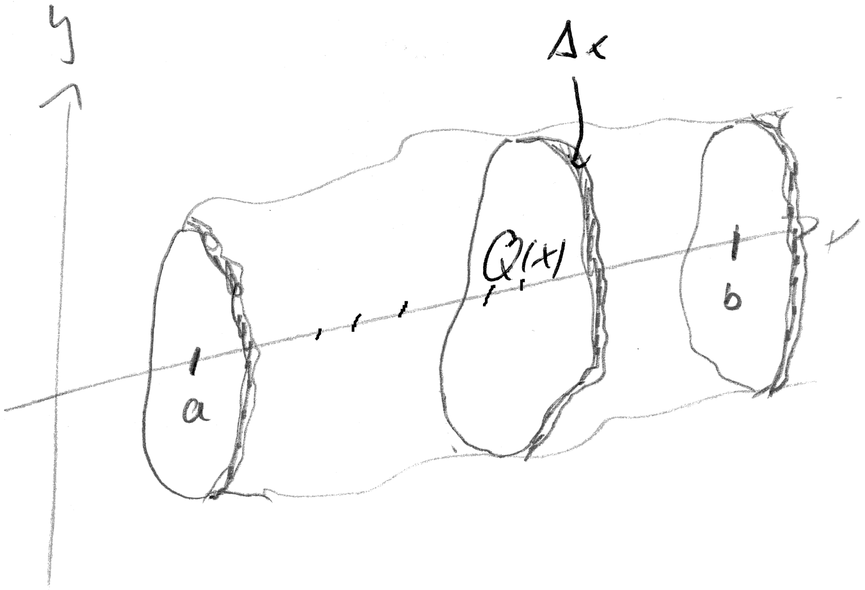
$$V = \int_a^b Q(x)\,dx$$

Q

bestimmt werden.

Überlegungen zur Herleitung

- Der obige Körper wird [innerhalb der Grenzen von a bis b] senkrecht zur x-Achse in dünne Scheiben der Dicke Δx zerschnitten.

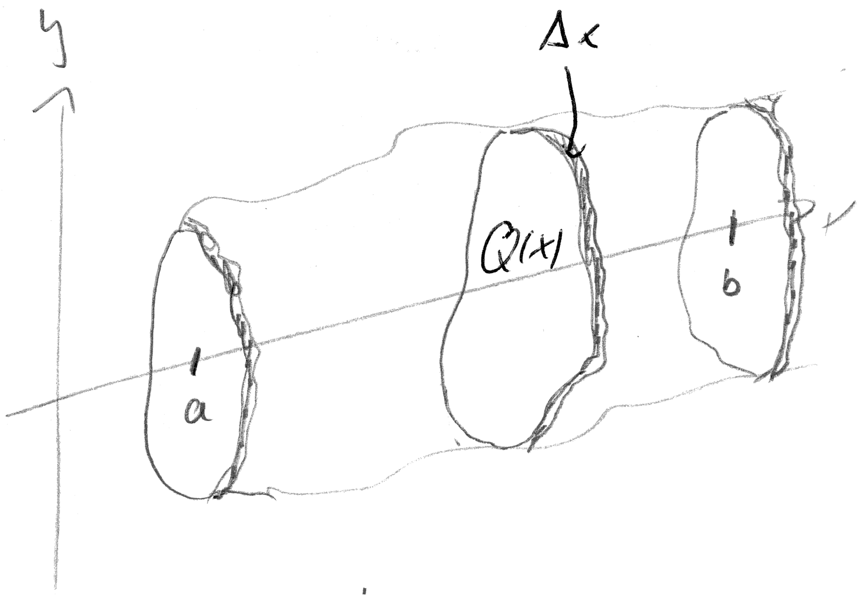


- Die Grundfläche der Scheibe ist praktisch die Querschnittsfläche Q(x) des Körpers an der Stelle x.

- Das Volumen der Scheibe [Grundfläche · Höhe] ist also $V_x = Q(x) \cdot \Delta x$

- Summiert man nun [von a bis b] alle Scheiben auf, so erhält man

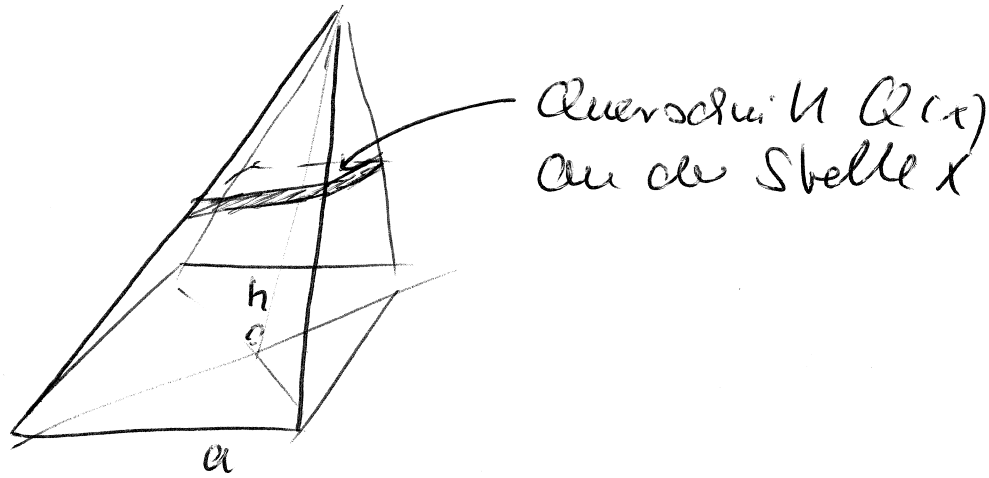
$$\sum_x Q(x) \cdot \Delta x$$



- Nun geht [wie bei den Rotationskörper] die Anzahl n der Scheiben gegen ∞, die Dicke Δx gegen 0.

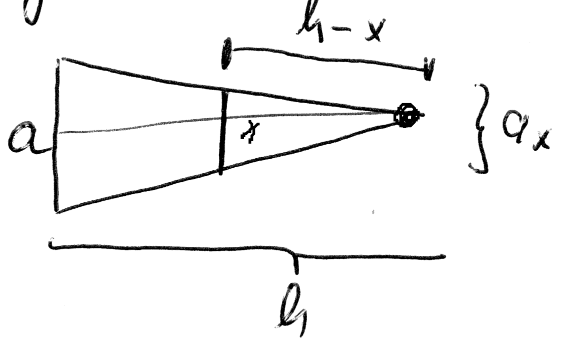
- $$\sum_{x} Q(x) \cdot \Delta x \xrightarrow[\Delta x \to 0]{n \to \infty} \int_a^b Q(x)\,dx$$

Beispiel] Wir leiten die Volumenformel für quadratische Pyramiden her. [Grundlinie a, Höhe h]



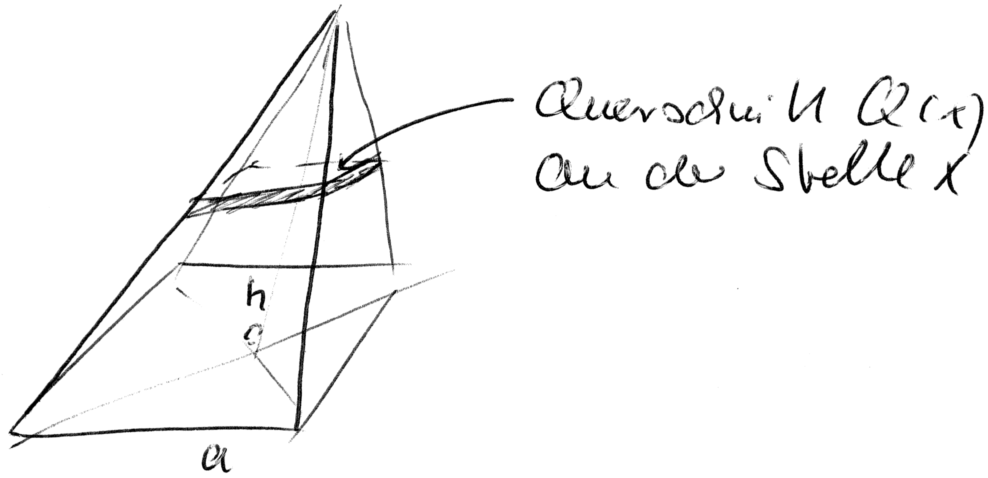
Ermittlung von Q(x) an der Stelle x:

→ Die Querschnittsfläche ist ein Quadrat mit der Seitenlänge a_x.
Für a_x gilt:



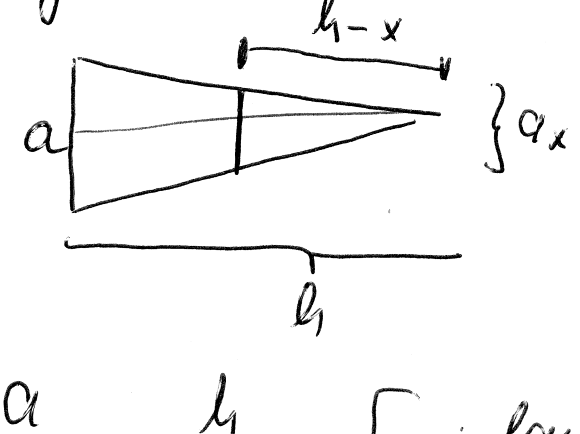
$$\frac{a}{a_x} = \frac{h}{h-x} \quad \left[\text{„}\frac{\text{lang}}{\text{kurz}} = \frac{\text{lang}}{\text{kurz}}\text{“}\right]$$

Beispiel: Wir leiten die Volumenformel für quadratische Pyramiden her. [Grundlinie a, Höhe h]



Ermittlung von Q(x) an der Stelle x:

→ Die Querschnittsfläche ist ein Quadrat mit der Seitenlänge a_x.
Für a_x gilt:



$$\frac{a}{a_x} = \frac{h}{h-x} \quad \left[\text{„}\frac{\text{lang}}{\text{kurz}} \hat{=} \frac{\text{lang}}{\text{kurz}}\text{"}\right]$$

12 14

Wir lösen nach a_x auf:

$$\frac{a}{a_x} = \frac{l_1}{l_1 - x} \quad \Big| \cdot a_x \Big| \cdot (l_1 - x)$$

$$a \cdot (l_1 - x) = l_1 \cdot a_x \quad \Big| : l_1 \neq 0$$

$$a_x = \frac{a(l_1 - x)}{l_1} = a_x(l_1, a, x)$$

Die Querschnittsfläche hat also den Wert

$$Q(x) = a_x \cdot a_x = \frac{a^2 (l_1 - x)^2}{l_1^2}$$

$$V_{Py} = \int_a^{l_1} Q(x)\,dx$$

$$\Rightarrow \quad V_{Py} = \int_0^{l_1} \frac{a^2}{l_1^2} (l_1 - x)^2\,dx$$

$$V_{Py} = \int_0^{l_1} \frac{a^2}{l_1^2} (l_1 - x)^2 \, dx$$

$$(l_1 - x)^2 = l_1^2 - 2l_1 x + x^2$$

$$= \frac{a^2}{l_1^2} \cdot \left[\int_0^{l_1} (l_1^2 - 2 l_1 \cdot x + x^2) \, dx \right]$$

$$= \frac{a^2}{l_1^2} \cdot \left[\underline{l_1^2 \cdot x} - \underline{l_1 x^2} + \underline{\tfrac{1}{3} x^3} \Big|_0^{l_1} \right]$$

$$= \frac{a^2}{l_1^2} \cdot \left[\underbrace{\left(l_1^2 \cdot l_1 - l_1 \cdot l_1^2 + \tfrac{1}{3} l_1^3 \right)}_{\text{Obere Gr}} - \underbrace{\underline{\underline{0}}}_{\text{unt. Grenze}} \right]$$

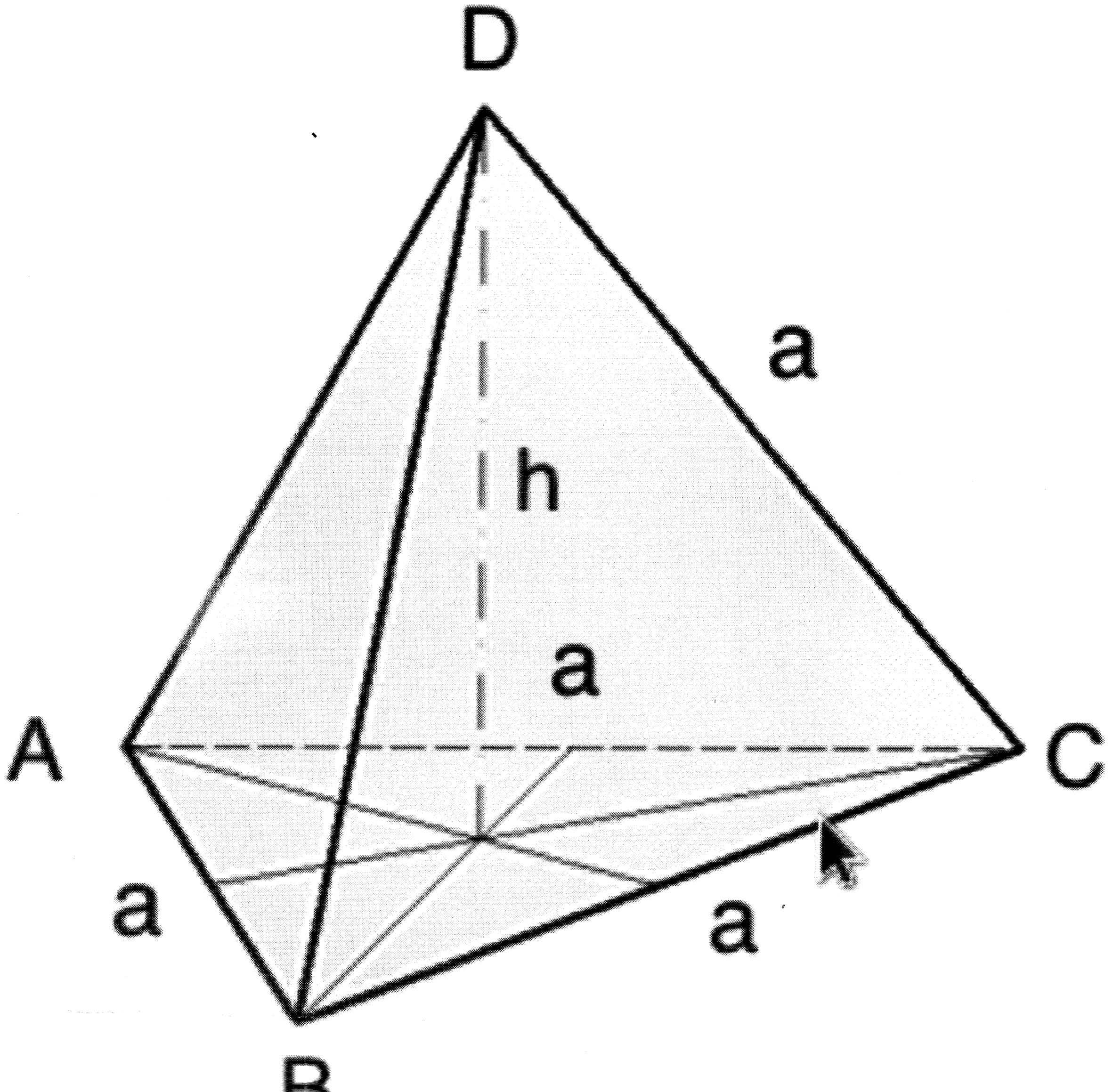
$$= \frac{a^2}{l_1^2} \cdot \left[\frac{1}{3} l_1^3 \right]$$

$$\underline{\underline{= \frac{1}{3} a^2 l_1}} \qquad = \left[\frac{1}{3} \cdot G \cdot h \right]$$

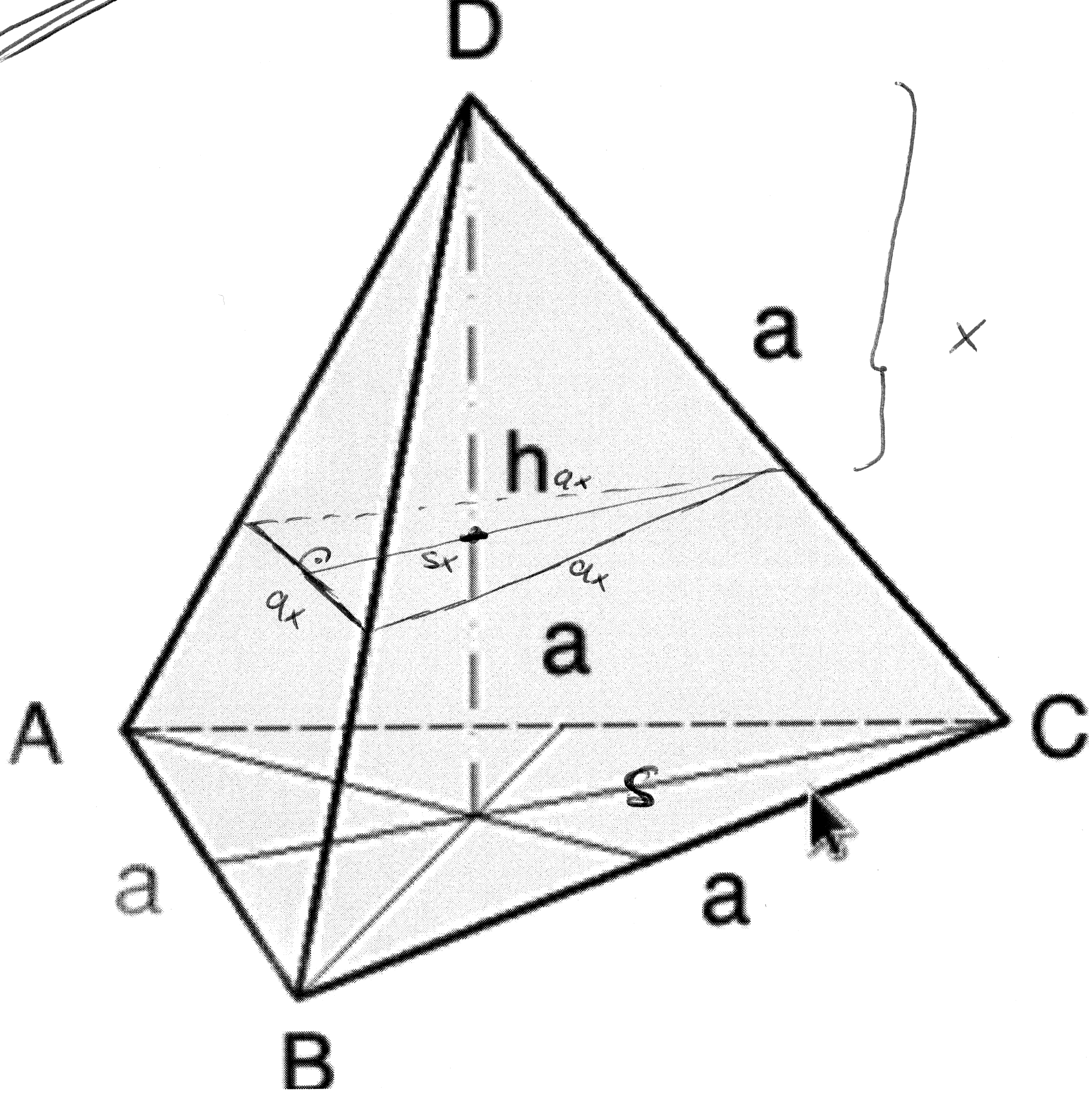
14
6

Aufgabe [schwer]

Man leite die Formel für das Volumen eines regelmäßigen Tetraeders mit der Kantenlänge a her.



495



Rechenplan → Berechnung von s

→ dann von h

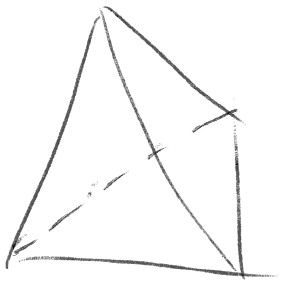
– dann Strahlensatz: Berechnung von $s_x(x)$

– dann Berechnung von $a_x(x)$

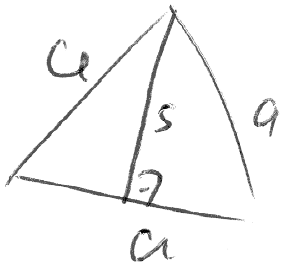
– dann Berechnung von Q_x (A_Δ)

– zum Schluß

Anwendung der Querschnittsformel 16



- Die Höhe eines Tetraeders steht senkrecht auf dem Schwerpunkt der Grundfläche
(Schnittpunkt der Seitenhalbierenden)



$$s^2 + \left[\frac{a}{2}\right]^2 = a^2 \quad \Big| - \frac{a^2}{4}$$

$$s^2 = \frac{3}{4}a^2$$

$$s = \frac{a}{2}\sqrt{3}$$

- Teilverhältnis der Seitenhalb.:

2:1

Also ist

$$h^2 + \left(\frac{2}{3}s\right)^2 = a^2$$

$$\Rightarrow h^2 = a^2 - \frac{4}{9}s^2$$

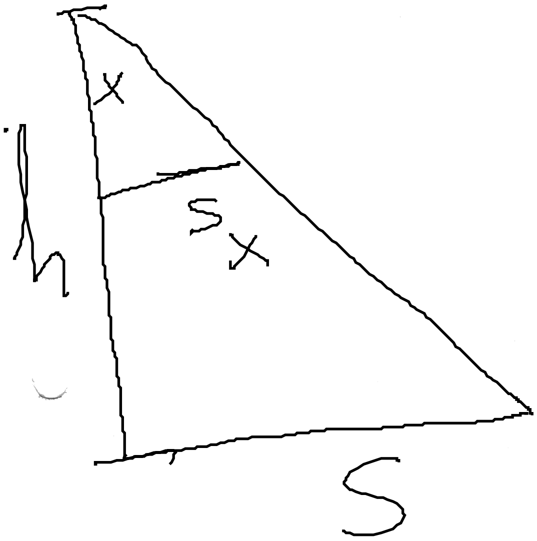
$$= a^2 - \frac{4}{9}\,\frac{a^2}{4}\cdot 3$$

$$= a^2 - \frac{a^2}{3} = \frac{2}{3}a^2 = \cancel{a\sqrt{\frac{2}{3}}}$$

$$h = a\sqrt{\frac{2}{3}}$$

Nach dem Strahlensatz gilt nun

$$\frac{x}{h} = \frac{s_x}{s} \Leftrightarrow \frac{x}{a\sqrt{\frac{2}{3}}} = \frac{s_x}{\frac{a}{2}\sqrt{3}} \quad \Big| \cdot \frac{a}{2}\sqrt{3}$$



$$\Rightarrow s_x = \frac{\frac{a}{2}\sqrt{3}}{\cancel{a}\sqrt{\frac{2}{3}}}\,x$$

$$= \frac{x}{2}\sqrt{\frac{3\cdot 3}{2}}$$

$$\underline{\underline{\frac{3x}{2\sqrt{2}}}}$$

Weil $s_x = \frac{a_x}{2}\sqrt{3}$ folgt

$$\underline{\underline{a_x = \frac{2s_x}{\sqrt{3}}}}$$

$$= \frac{\cancel{2}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{3x}{\cancel{2}\cdot\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}\cdot\cancel{\sqrt{3}}\cdot x}{\cancel{\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2}}$$

$$\underline{\underline{= \sqrt{\frac{3}{2}}\,x}}$$

18

$Q(x) = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$

$= \frac{1}{2} \cdot a_x \cdot s_x$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \cdot x \cdot \frac{3 \cdot x}{2 \cdot \sqrt{2}}$

2

$= \frac{\sqrt{3} \cdot 3}{8} x^2$

Querschnittsformel

$V = \int_a^b Q(x)\, dx \qquad h \in \left[0; a\sqrt{\tfrac{2}{3}}\right]$

$= \int_0^{a\sqrt{\frac{2}{3}}} \frac{3}{8}\sqrt{3}\, x^2\, dx$

$= \frac{\sqrt{3}}{8} x^3 \Big|_0^{a\sqrt{\frac{2}{3}}} = \frac{\sqrt{3}}{8} \cdot \left[a\sqrt{\tfrac{2}{3}}\right]^2 - 0$

$= \frac{\cancel{\sqrt{3}}}{\cancel{8}_4} \cdot a^3\, \frac{\cancel{2} \cdot \sqrt{2}}{3\cancel{\sqrt{3}}} = \frac{1}{12} a^3 \sqrt{2}$ B

19