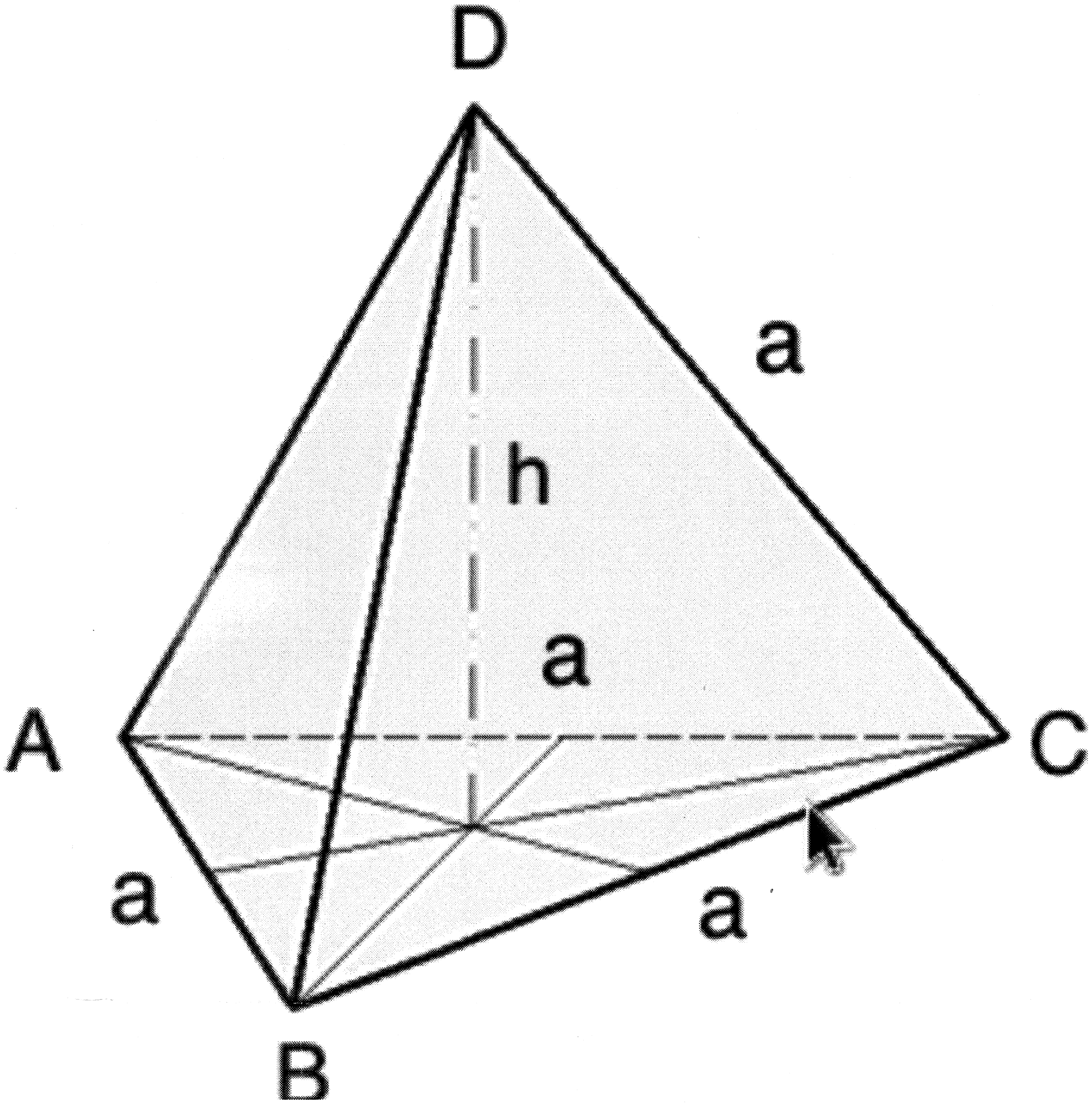
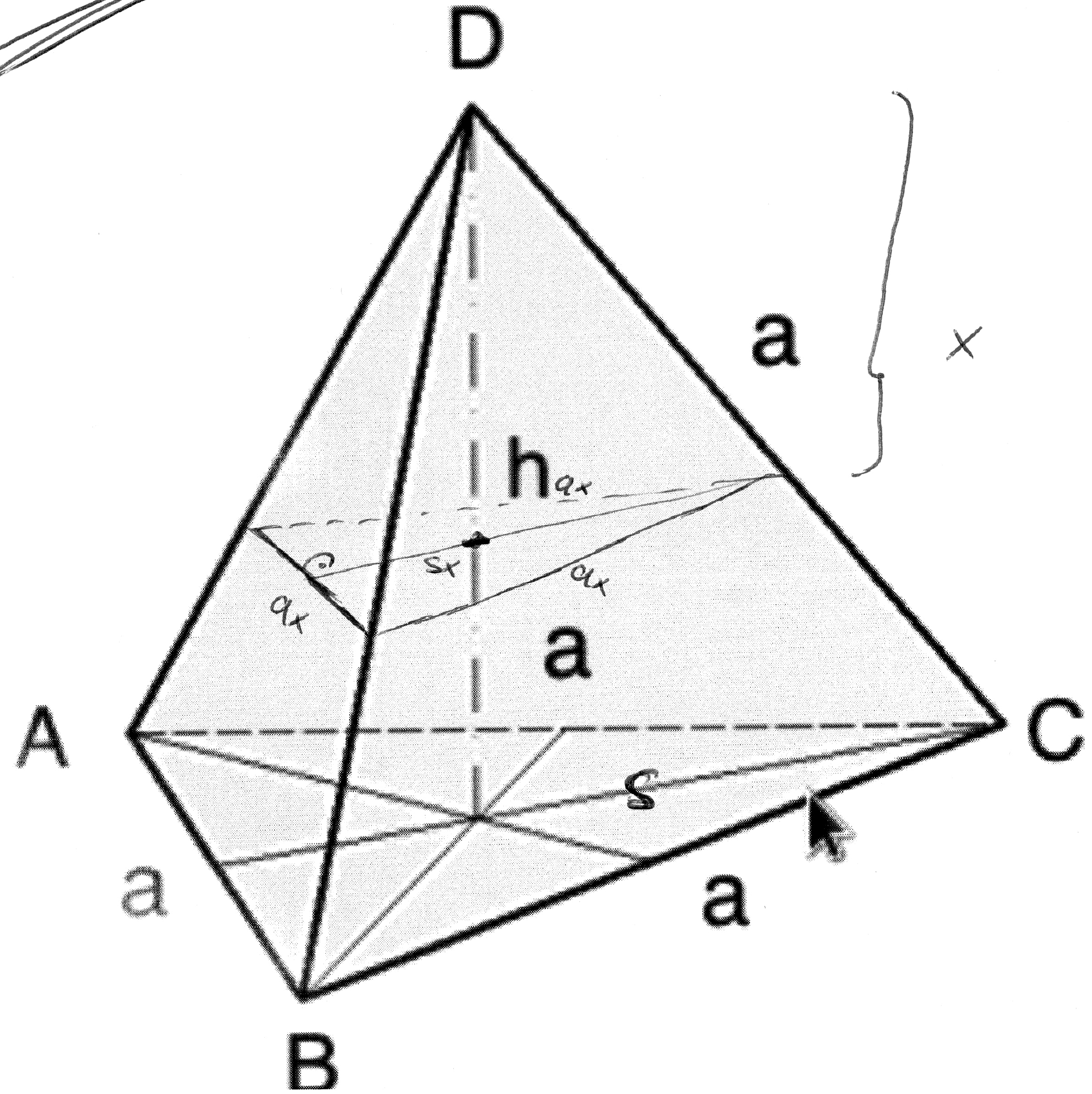
495

Aufgabe [schwer]

Man leite die Formel für das Volumen eines regelmäßigen Tetraeders mit der Kantenlänge a her.



495



Rechenplan → Berechnung von s

→ dann von h

– dann Strahlensatz: Berechnung von $s_x(x)$

– dann Berechnung von $a_x(x)$

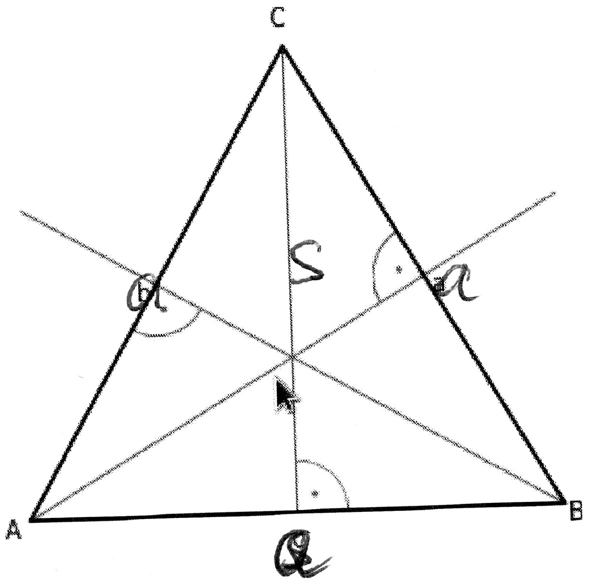
– dann Berechnung von $Q_x(A_\Delta)$

– zum Schluß

Anwendung der Querschnittsformel 16

Vorbemerkung

Die Tetraederhöhe h steht senkrecht auf dem Schwerpunkt [„Mittelpunkt"], Schnittpunkt aller Hilfslinien im gleichseitigen Δ.



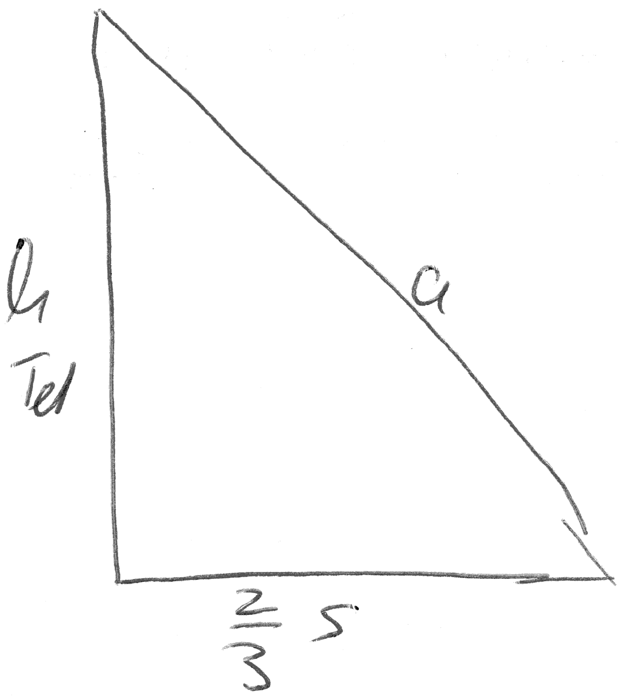
Berechnung von s

$$s^2 + \left[\frac{a}{2}\right]^2 = a^2 \quad \Big| -\frac{a^2}{4}$$

$$s^2 = \frac{3}{4}a^2 \quad \Big| \sqrt{}$$

$$s = \frac{a}{2}\sqrt{3}$$

Berechnung von $l_{1\,Tetr.}$



Schwerlinien Teilverhältnis 2:1

$$l_1^2 + \left[\frac{2}{3}s\right]^2 = a^2 \quad \Big| -\frac{4}{9}s^2$$

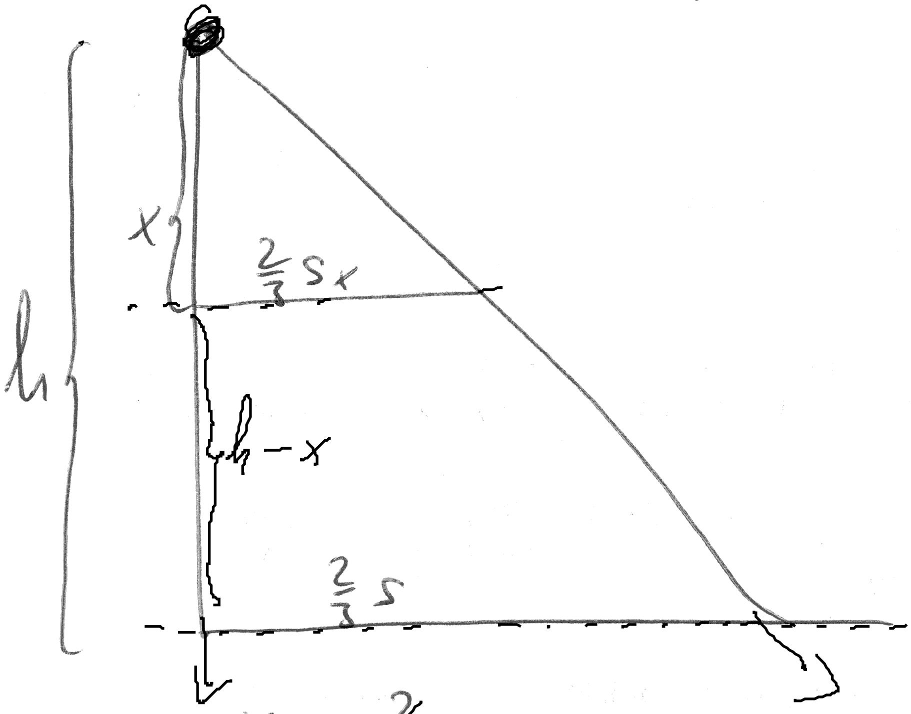
$$l_1^2 = a^2 - \frac{4}{9}\cdot s^2$$

$$= a^2 - \frac{\cancel{4}}{\cancel{9}_{3}}\cdot \frac{\cancel{3}}{\cancel{4}}a^2$$

$$= a^2 - \frac{a^2}{3} = \frac{2}{3}a^2 = \cancel{a\sqrt{}}$$

$$\underline{\underline{l_1 = a\sqrt{\frac{2}{3}}}}$$

Berechnung von $a_x | s_x$ zur Berechnung der Querschnittsfläche



$$\frac{x}{h} = \frac{\cancel{\frac{2}{3}} s_x}{\cancel{\frac{2}{3}} s} \iff \frac{x}{h} = \frac{s_x}{s}$$ einsetzen:

$$\iff \frac{x}{a\sqrt{\frac{2}{3}}} = \frac{s_x}{\frac{a}{2}\sqrt{3}} \quad \Big| \cdot \frac{a}{2}\sqrt{3}$$

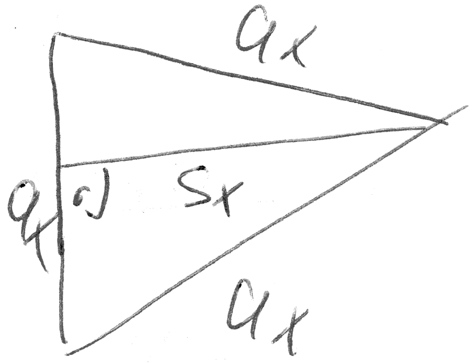
$$\iff \frac{\frac{\cancel{a}}{2}\sqrt{3}\, x}{\cancel{a}\sqrt{\frac{2}{3}}} = s_x$$

3

$$\iff \frac{ax}{2a} \cdot \sqrt{3 \cdot \frac{3}{2}} = s_x$$

$$s_x = \frac{3}{2}x \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}x\sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{3}{4}x\sqrt{2}$$

Zur Berechnung von a_x



$$\left[\frac{a_x}{2}\right]^2 + s_x^2 = a_x^2 \quad \Big| -\frac{a_x^2}{4}$$

$$\frac{3}{4}\,\underline{\underline{a_x}}^2 = s_x^2 \quad \Big| \cdot \frac{4}{3}$$

$$\underline{\underline{a_x^2}} = \frac{4}{3}\cdot s_x^2$$

$$= \frac{4}{3}\cdot\left[\boxed{\frac{3}{4}x\sqrt{2}}\right]^2$$

$$= \frac{\cancel{4}}{\cancel{3}}\cdot\frac{\cancel{9}^{\,3}}{\cancel{16}_{\,\cancel{4}\;2}}\cdot\cancel{2}\cdot x^2$$

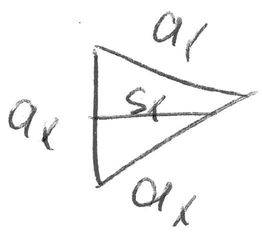
$=$

$$= \frac{3}{2}x^2$$

$$\underline{\underline{a_x = x\sqrt{\frac{3}{2}}}}$$

4

Nun läßt sich endlich die Querschnittsfläche Q berechnen:



$$Q(x) = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$$

$$= \frac{1}{2} \cdot a_x \cdot s_x$$

$$= \frac{1}{2} \cdot x\sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \frac{3}{4} x \sqrt{2}$$

$$= \frac{3}{8} x^2 \cdot \sqrt{\frac{3}{2} \cdot 2}$$

$$\underline{\underline{= \frac{3}{8}\sqrt{3}\, x^2}}$$

Damit geht man in die Querschnittsformel,

$$V = \int_a^b Q(x)\,dx$$

$$V = \int_a^b Q(x)\,dx \quad !!!$$

$$a\sqrt{\tfrac{2}{3}} \longleftarrow h$$

$$= \int_0^{a\sqrt{\frac{2}{3}}} \underbrace{\frac{3}{8}\sqrt{3}\,x^2}_{Q(x)}\,dx$$

untere Grenze

$$= \underbrace{\frac{3}{8}\sqrt{3}\cdot\frac{1}{3}x^3}_{\text{Stamm}\int}\Bigg|_0^{a\sqrt{\frac{2}{3}}}$$

$$= \frac{3}{8}\sqrt{3}\cdot\frac{1}{3}\left[a\sqrt{\tfrac{2}{3}}\right]^3 - 0$$

$$= \frac{\cancel{3}}{\cancel{8}_{4}}\sqrt{3}\cdot\frac{1}{\cancel{3}}\cdot a^3\cdot\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}} = \underline{\underline{\frac{1}{12}a^3\sqrt{2}}} = V_{Tetr.}$$

$$\sqrt{3}\cdot\sqrt{\tfrac{2}{3}} = \sqrt{2}$$

<u>Ausblick</u> Theorie der uneigentlichen Integrale mit vielen Beispielen