455

Numerische Integration

Vorbem.: Leider lassen sich – sehr! – viele Integrale nicht übers „Prinzip Stammfunktion" lösen.

Für diese Fälle gibt es „Näherungsverfahren".

In den folgenden Videos stelle ich vor:

Sehnentrapezregel

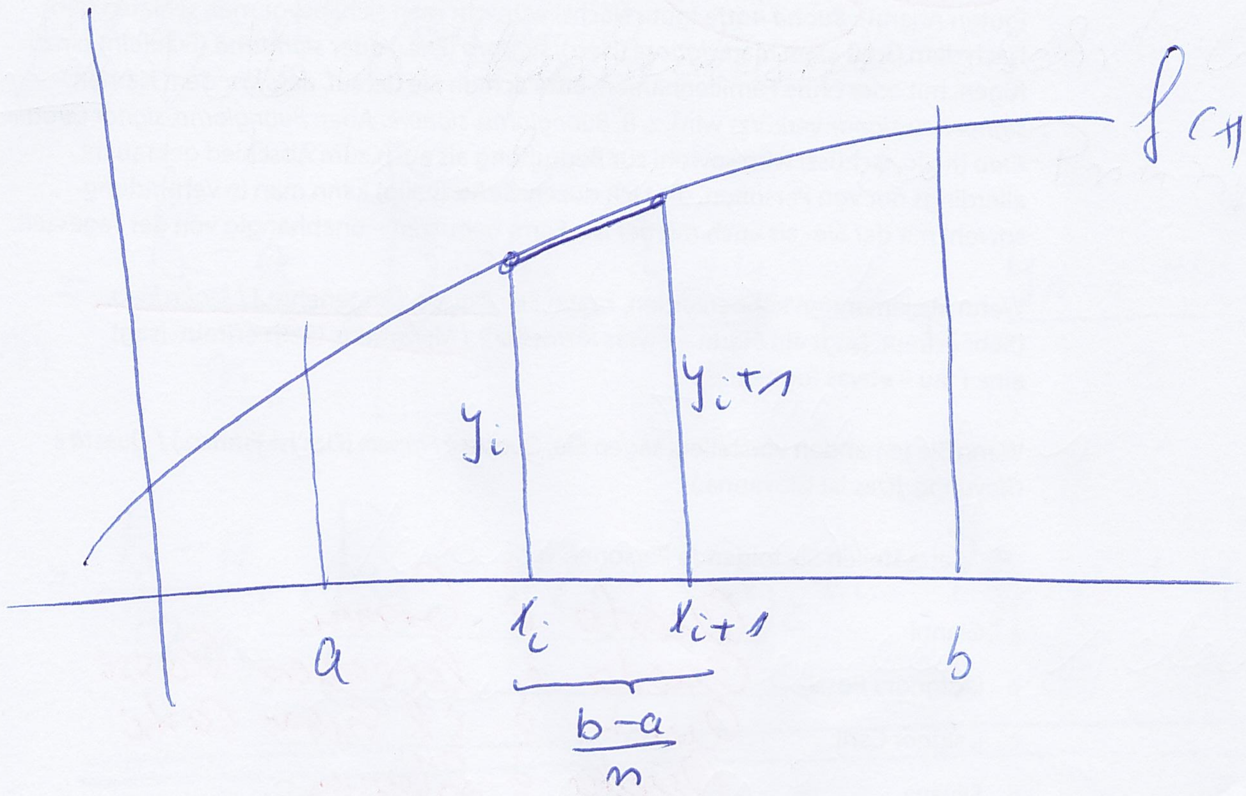
Tangententrapezregel

Zusammenfassung beider Regeln

$\Downarrow$

Sonderfall: Keplersche Faßregel (Simpsonregel)

Sehnentrapezregel



$$A_{Trapez} = \frac{a+b}{2} \cdot h = m \cdot h$$

$$= \frac{y_i + y_{i+1}}{2} \cdot \frac{b-a}{n}$$ Flächeninhalt des i-ten Trapezes

Summiert man nun alle Trapeze auf, so erhält man

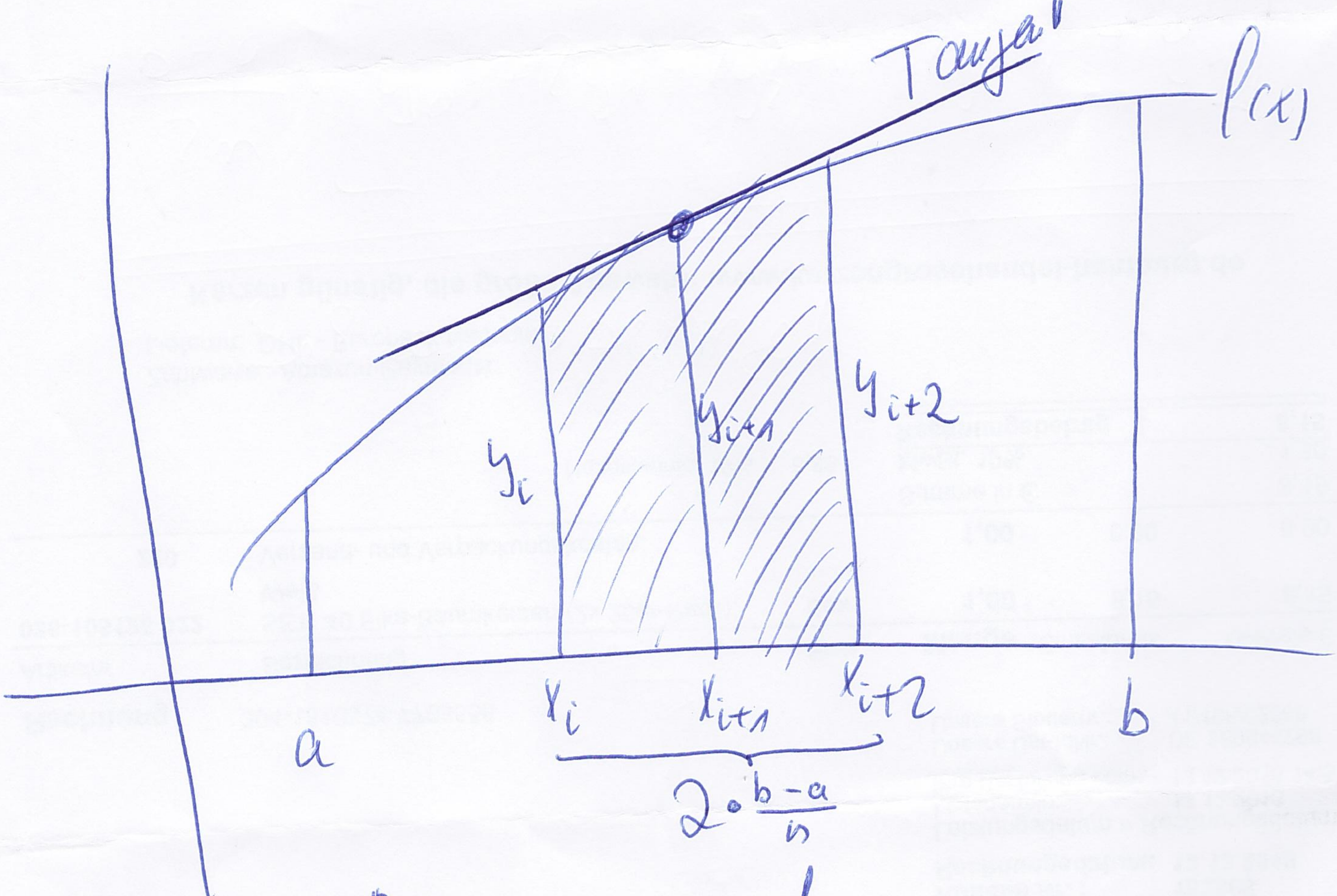
$$S_n = \frac{b-a}{n} \cdot \left[\frac{y_0 + y_1}{2} + \frac{y_1 + y_2}{2} + \ldots + \frac{y_{n-1} + y_n}{2} \right]$$

$$= \frac{b-a}{2n} \cdot \left[y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \ldots + 2y_{n-1} + y_n \right]$$

Sehnentrapezregel

500 Tangententrapezregel

Hat man das Intervall [a, b] in eine gerade Anzahl von Intervallen zerlegt, kann man jeweils 2 Intervalle wie folgt zusammenfassen:



$$A_{\text{Tangententrapez}} = \frac{a+b}{2} \cdot h = \underline{\underline{m}} \cdot h$$

$$= m \cdot \left(2 \cdot \frac{b-a}{n}\right)$$

$$= \frac{y_i + y_{i+2}}{2} \cdot \left(2 \cdot \frac{b-a}{n}\right) \quad (4)$$

$$= y_{i+1} \cdot \left(2 \cdot \frac{b-a}{n}\right)$$

$$\left[\quad m \cdot h_1 \quad\right]$$

z. B. 1. Doppelintervall

$x_0 = a$: $y_{0+1} \cdot \left(2 \cdot \frac{b-a}{n}\right)$

$[x_0 / x_1 / x_2]$

oder 2. Doppelintervall

$[x_2 / x_3 / x_4]$ $y_{2+1} \cdot \left(2 \cdot \frac{b-a}{n}\right)$ usw

Summiert man nun alle Tangenten-trapeze auf, so erhält man

$$\cancel{T}_n = 2 \cdot \frac{b-a}{n} \cdot \left[\underset{\text{s.o.}}{\underline{\underline{y_1}}} + \underset{\text{s.o.}}{\underline{\underline{y_3}}} + \dots + y_{n-1} \right]$$

501

Überlegung

S_n und T_n werden zusammengefasst:

Da wir doppelt so viele Sehnentrapeze wie Tangententrapeze benutzt haben, gewichten wir: 2:1 und addieren

$$K_n = \frac{1}{3} \cdot \left(2 S_n + T_n\right)$$

Der „kleinstmögliche Fall $n=2$" liefert

$$\cancel{K_2 = \frac{1}{3} \cdot \left(2 S_2 + T_2\right)}$$

$$\cancel{= \frac{1}{3} \cdot \Big[\underbrace{2 \cdot \frac{b-a}{2} \cdot [y_1]}_{S_2} + }$$

$$K_2 = \frac{1}{3} \cdot \left(2 \cdot S_2 + T_2\right)$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \left(2 \cdot \underbrace{\frac{b-a}{2 \cdot 2}\left[y_0 + 2y_1 + y_2\right]}_{S_2} + 2 \cdot \frac{b-a}{2} \cdot y_1\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{b-a}{2}\left[y_0 + 2y_1 + y_2 + 2y_1\right]\right)$$

$$= \underline{\underline{\frac{b-a}{6}\left[y_0 + 4y_1 + y_2\right]}}$$

bekannt als <u>Keplersche Faßregel</u>.

502 Beispiel

$$\int_0^2 x^2 dx = \frac{1}{3} x^3 \Big|_0^2 = \frac{8}{3} = 2{,}\overline{6}$$

Sehnentrapezregel: $n = 4$

$x_0 = 0 \quad x_1 = \frac{1}{2} \quad x_2 = 1 \quad x_3 = \frac{3}{2} \quad x_4 = 2$

$f(0) = 0 \quad f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4} \quad f(1) = 1 \quad f(\frac{3}{2}) = \frac{9}{4} \quad f(2) = 4$

$$S_n = \frac{2-0}{2 \cdot 4} \cdot \left[0 + 2 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot 1 + 2 \cdot \frac{9}{4} + 4 \right]$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \left[\frac{1}{2} + 2 + 4\frac{1}{2} + 4 \right]$$

$$= \frac{11}{4} = \underline{\underline{2{,}75}}$$

$$T_n = \frac{2 \cdot (2-0)}{4} \cdot \left[\frac{1}{4} + \frac{9}{4} \right]$$

$$= 1 \cdot \frac{10}{4} = \underline{2{,}25}$$

8

$$K_n = \frac{1}{3} \cdot (2S_n + T_n)$$

$$K_4 = \frac{1}{3} \cdot (2S_4 + T_4)$$

$$= \frac{1}{3} \cdot (2 \cdot 2{,}75 + 2{,}25)$$

$$= \frac{1}{3} \cdot 7{,}75$$

$$\overset{!}{=} 2{,}58\overline{3}$$

also

$$2{,}\overline{6}$$

S_4: 2,75

T_4: 2,25

K_4: $\underline{\underline{2{,}58\overline{3}}}$

Ausblick

→ Polarkoordinaten

→ Spiralen

→ Leibnizsche Sehnenformel

→ Taylorentwicklung o. eine Einführung