542

Linear unabhängig
linear abhängig

Erklärung [„Definition"] n Vektoren $\vec{a}_1 \dots \vec{a}_n$ heißen linear unabhängig, wenn eine Gleichung der Form

$$\underbrace{r_1 \cdot \vec{a}_1 + r_2 \vec{a}_2 + \dots + r_n \vec{a}_n} = 0$$

nur die eine Lösung $\boxed{r_1 = r_2 = r_3 = \dots = r_n = 0}$ hat.

In allen anderen Fällen nennt man die Vektoren $\vec{a}_1 \dots a_n$ linear abhängig.

Beispiele

(1) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^2$ l.u. oder l.a ?

Ansatz $\quad r_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + r_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \overset{?}{=} 0$

und wir bestimmen r_1, r_2

$$\begin{pmatrix} 1r_1 \\ 2r_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3r_2 \\ 4r_2 \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{aligned} r_1 + 3r_2 &= 0 \quad | \cdot 2 \\ 2r_1 + 4r_2 &= 0 \end{aligned} \Big] \ominus$$

$$2r_1 + 4r_2 = 0 \Rightarrow r_1 = 0$$

$$0r_1 - 2r_2 = 0 \Rightarrow r_2 = 0$$

also $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$ l.u.

(2)

② $\left\{\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix};\begin{pmatrix}-4\\-2\\-6\end{pmatrix}\right\} \subset \mathbb{R}^3$ l.u. oder l.a.?

Wir sehen weiter an:

$$r_1\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} + r_2\begin{pmatrix}-4\\-2\\-6\end{pmatrix} \overset{?}{=} 0 \qquad r_1 = ?\quad r_2 = ?$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{lll} \text{I} & 2r_1 - 4r_2 = 0 & \mid :2 \\ \text{II} & 1r_1 - 2r_2 = 0 \cdot 2 & \\ \text{III} & 3r_1 - 6r_2 = 0 & \mid :3 \end{array} \quad \ominus$$

$$\begin{array}{ll} \text{II} & r_1 - 2r_2 = 0 \\ \text{II}-\text{I} & 0r_1 + 0r_2 = 0 \\ \text{III} & r_1 - 2r_2 = 0 \end{array} \quad \ominus$$

$$\left|\begin{array}{l} r_1 - 2r_2 = 0 \\ \cancel{0r_1 + 0r_2 = 0} \\ \cancel{0r_1 + 0r_2 = 0} \end{array}\right| \Leftrightarrow \begin{array}{l} r_1 = 2r_2 \\ c = 2r_2 \end{array}$$

$$\mathbb{L} = \left\{ (r_1 \mid r_2) \;\middle|\; r_1 = c\;;\; r_2 = \frac{c}{2} \right\}$$

③

Es gibt unendlich viele Lösungen,

d.h. $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ -6 \end{pmatrix} \right\}$ l.a

---

③ $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}$ l.a. oder l.u.?

Ansatz $r_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + r_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \overset{?}{=} 0$ $\quad r_1 = ?$ $\quad r_2 = ?$ $\quad r_3 = ?$

$$\Leftrightarrow \begin{aligned} 2r_1 + 0r_2 + 1r_3 &= 0 \\ 1r_1 + 1r_2 + 0r_3 &= 0 \quad | \cdot 2 \\ 2r_1 + 1r_2 + 2r_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} 2r_1 + 0r_2 + 1r_3 = 0 \\ 0r_1 - 2r_2 + 1r_3 = 0 \\ 0r_1 - 1r_2 - 1r_3 = 0 \quad | \cdot 2 \end{cases}$$

④

$$2r_1 + 0r_2 + 1r_3 = 0 \Rightarrow r_1 = 0$$
$$-2r_2 + 1r_3 = 0 \Rightarrow r_2 = 0$$
$$-3r_3 = 0 \Rightarrow r_3 = 0$$

nur $r_1 = r_2 = r_3 = 0$ ist Lösung, also

l.u.

5

Sätze über l.u. und l.a. Vektoren

(eine Auswahl)

(1) Gegeben sind <u>3 l.u.</u> Vektoren des $\mathbb{R}^3$, also

z.B. $\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$ $\vec{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$ $\vec{c}=\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}$

<u>Behauptung</u> Lässt man einen weg, so sind die verbleibenden immer noch l.u.

<u>Begründung</u> [Vorschlag!]

$\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ l.u. d.h. $\underline{r_1\vec{a}+r_2\vec{b}+r_3\vec{c}} \overset{?}{=} 0$

nur mit $\underline{r_1=r_2=r_3=0}$

Wir lassen: $\vec{b}$ weg

Wegen $\boxed{r_1\vec{a} + \cancel{r_2\vec{b}} + r_3\vec{c} = 0 \quad \text{mit } r_i = 0}$

ist $r_1\vec{a} + \cancel{0\vec{b}} + r_3\vec{c} = 0$ mit $r_1 = r_3 = 0$

(2) Ist eine von "mehreren" Vektoren der Nullvektor, so sind all diese Vektoren l.a.

Bew.: $\{\vec a_1, \vec a_2, \dots a_n\}$ „mehrere Vektoren"

Ist nun $\vec a_k$ der Nullvektor, so ist

$$r_1\vec a_1 + r_2\vec a_2 + \dots + r_{k-1}a_{k-1} + \overset{5\cdot}{r_k}\,a_k + \dots + r_n\vec a_n = 0$$

und für r_k darf z.B. „5" eingesetzt werden.

Also sind nicht alle $r_i = 0$, also sind die Vektoren l.a.

Ausblick: Basis und Dimension

(7)

weitere Ausblick

Höhere Mathematik für ...

....