Geraden

Hinweis Geradenscharen:

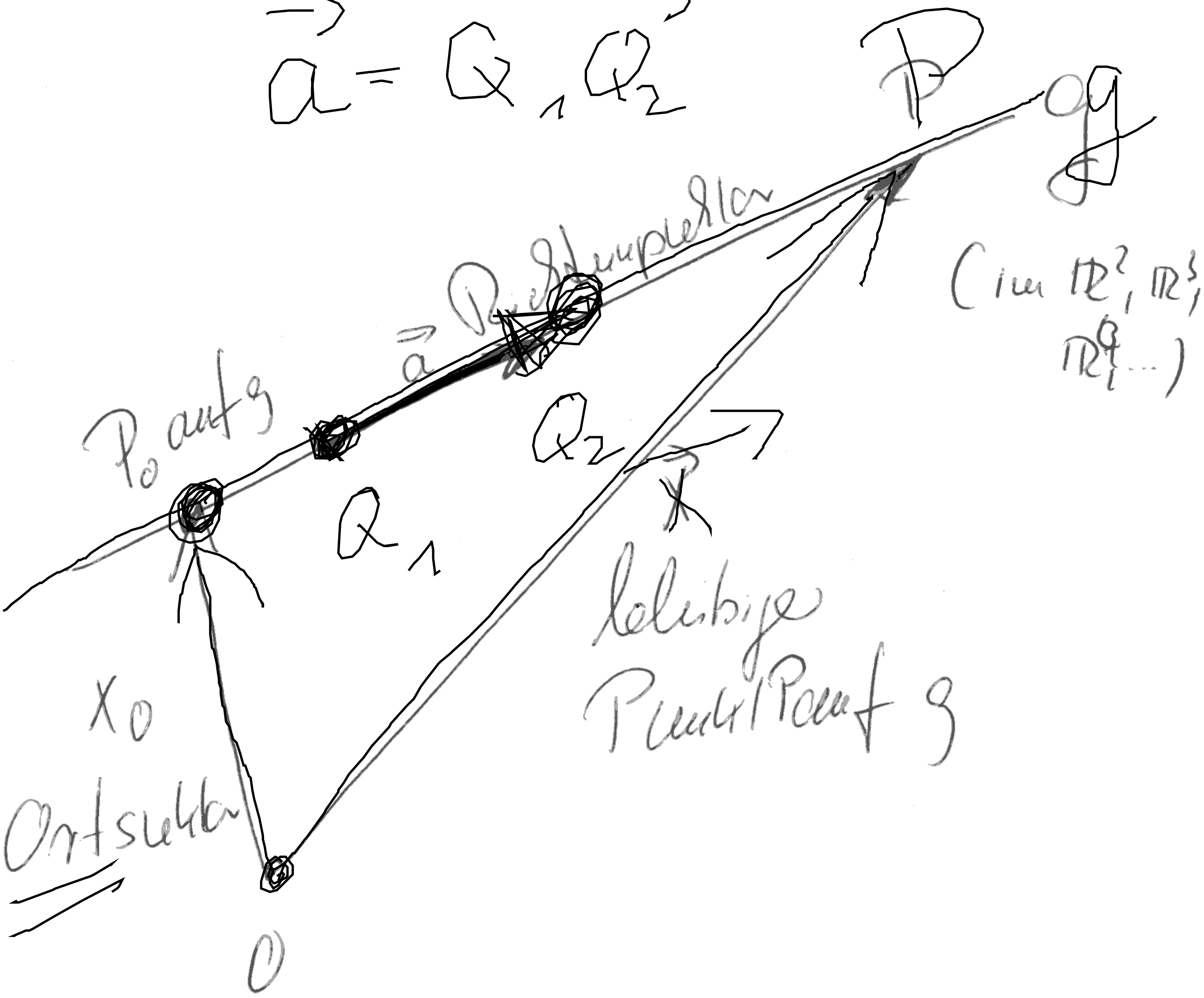
u.a. Video 22 + Video 23

„Leistungskurs Mathe 22"

„Leistungskurs Mathe 23"

Screenshot der Playlists

$$\vec{a} = \overrightarrow{Q_1 Q_2}$$



offenbar gilt für alle $\vec{x}$:

$$\underset{\in g}{\vec{x}} \overset{!}{=} \underset{\text{Ortsvektor}}{x_0} + \boxed{r} \cdot \underset{\text{Richtungsvektor}}{\vec{a}}$$

Beispiele

$r \in \mathbb{R}$

$\mathbb{R}^2$

g_1: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$

Gerade im $\mathbb{R}^2$ durch $P_0(2|1)$ mit Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$

g_2: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$\boxed{\vec{x} \overset{!}{=} t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}}$$ Nullpunktgerade

Gerade im $\mathbb{R}^2$ durch $P_0(0|0)$ mit RV $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

g_3: $\vec{x} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$ Gerade im Raum $\mathbb{R}^3$ durch $P_0(0|0|0)$ mit RV $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$

$$\vec{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{OV} + s \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}}_{RV} \quad s \in \mathbb{R}$$ ③

$$g_4: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \leftarrow t$$

„Gerade" im $\mathbb{R}^4$ durch $P_0(1|2|3|8)$ mit RV $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Standardaufgaben Teil 1

① Gegeben ist $P_0(2|3|8)$ und der RV $\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$. Bestimme die Geradengleichung g.

$$g: \vec{x} = \vec{x}_0 + \lambda \cdot \vec{a}$$

<u>Lösung</u>

$$g: \vec{x} = \underbrace{\begin{pmatrix}2\\3\\8\end{pmatrix}}_{\text{Ortsvektor, } P_0 \text{ \underline{auf} } g} + \alpha \cdot \underbrace{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}}_{\text{Richtungsvektor } \vec{a} \text{ der Geraden}}$$

② Die Gerade g geht durch A(1|2) und B(7|4).

Bestimme g: $\vec{x} = \vec{x_0} + c \cdot \vec{a}$

Lösung Wir brauchen P_0 auf g und entscheiden uns für $P_0 = (1|2)$, also

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + c \cdot \vec{a}$$

Verbindet man 2 Geradenpunkte, so erhält man einen (!) RV von g

$$\overrightarrow{AB} = \underset{B}{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}} - \underset{A}{\begin{pmatrix}7\\4\end{pmatrix}} = \begin{pmatrix}-6\\-2\end{pmatrix}$$

also

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + a \cdot \underline{\underline{\begin{pmatrix}-6\\-2\end{pmatrix}}}$$

③ Liegt $A(1|2|3)$ auf

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\0\\4\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} \; ?$$

<u>Ansatz:</u>

$$\boxed{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \overset{?}{=} \begin{pmatrix}2\\0\\4\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\left|\begin{array}{l} 1 = 2 + 1s \\ 2 = 0 - 1s \\ 3 = 4 + s \end{array}\right| \begin{array}{l} \Rightarrow s = -1 \\ \Rightarrow s = -2 \\ \rightarrow \lightning \; s = -1 \end{array}$$

$A \notin g$

④ Gib 2 verschiedene Punkte an, die auf

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix} ; t \in \mathbb{R}$$

liegen

beliebige Zahlen

<u>Lösung</u> Wir wählen (beliebig)

$$t=0: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$P_1(1|2)$

$$t=1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}}}$$

$P_2(1|-2)$

__Ausblick__ Lage von Geraden zueinander und Standardaufgaben dazu

www.raphael-biere.de

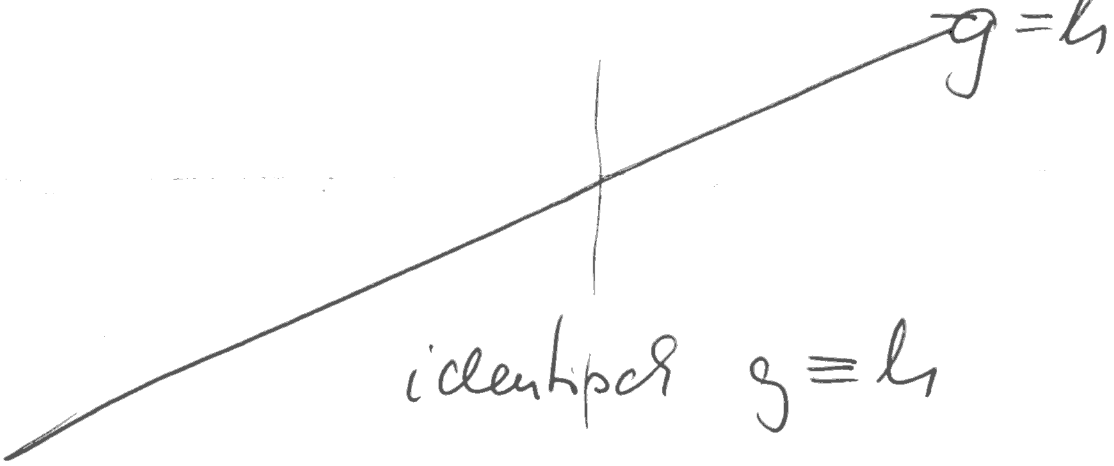
Geradenscharen: Screenshot
mauer
Playlists

Geraden

und ihre Lage[n] zueinander

in der Ebene ($\mathbb{R}^2$) | im Raum ($\mathbb{R}^3$)

①



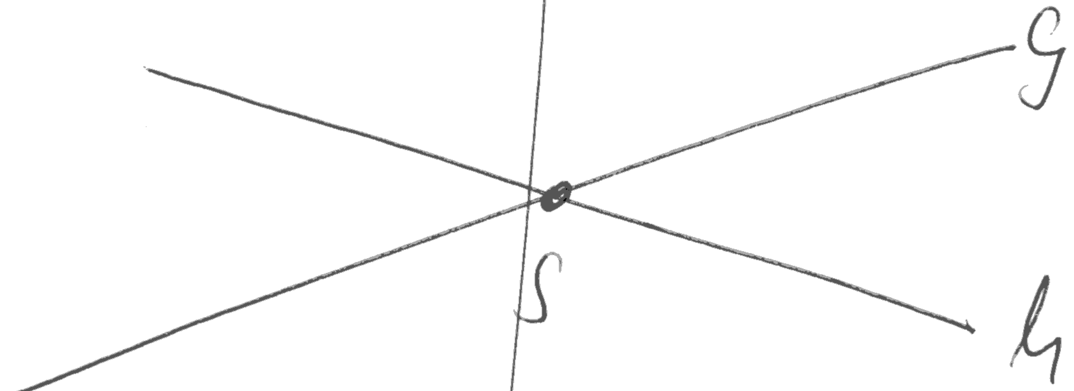
identisch $g \equiv h$

②

<u>echt</u> parallel

in der Ebene ($\mathbb{R}^2$) | im Raum ($\mathbb{R}^3$)

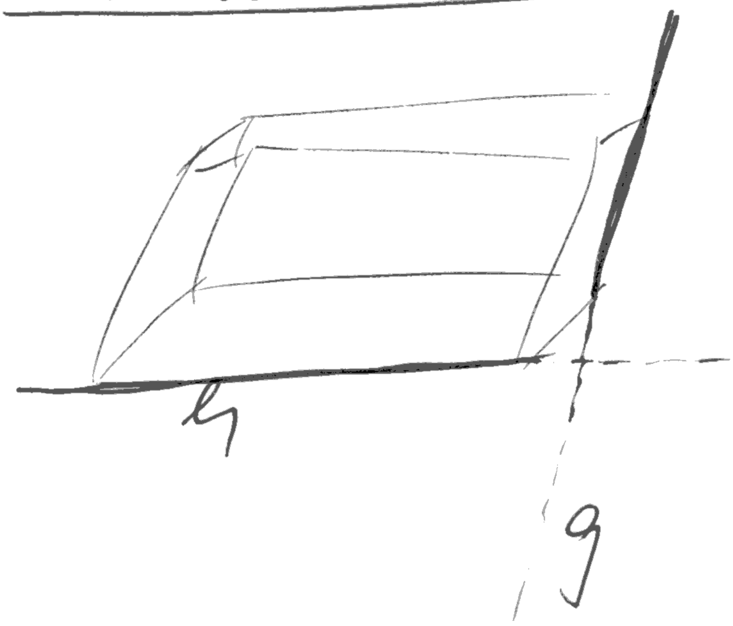
③



gemeinsamer (Schnitt)-punkt S

④

nur im Raum



Es gibt mehrere Möglichkeiten, 2 gegebene Geraden auf ihre Lage hin zu untersuchen.

→ <u>über eine erste Betrachtung der Richtungsvektoren</u>

<u>im $\mathbb{R}^2$</u>

$$g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$g_2: x = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -6 \\ -8 \end{pmatrix}$$

Offenbar sind $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6 \\ -8 \end{pmatrix}$ linear abhängig:

$$(-2)\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -8 \end{pmatrix}$$

Da wir in der Ebene sind, gilt

$$g_1 \equiv g_2 \text{ oder } g_1 \parallel g_2$$

Man prüft, ob ein Punkt aus g_1 auch auf g_2 liegt (oder umgekehrt)

$(2|1) \in g_2 ?$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -6 \\ -8 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{ll} 2 = -6s & \Rightarrow s = -\frac{1}{3} \\ -2 = -8s & \Rightarrow s = \frac{1}{4} \end{array} \quad ↯$$

Die Geraden sind echt parallel

im $\mathbb{R}^3$

$$g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$g_2 \ \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Die RV'en sind l.a.: $2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}$

also $g_1 \equiv g_2$ oder $g_1 \parallel g_2$

Wie im $\mathbb{R}^3$ prüft man nun:

$(1|2|1) \in g_2$?

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{l} 1 = 0 \\ 1 = -4 \\ 1 = 6s \end{array}$$

↯ also $g_1 \parallel g_2$

Oder aber man wählt jeweils den Gleichsetzungsansatz

$$g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \overset{?}{=} \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2s \\ -1s \end{pmatrix} - t\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\left| \begin{array}{l} 2s - 3t = -3 \\ -1s - t = -1 \end{array} \right| \begin{array}{l} \\ \cdot 2 \end{array} \Big] \oplus$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\begin{array}{l} 2s - 3t = -3 \\ 0s - 5t = -5 \end{array} \longrightarrow t = 1 \longrightarrow s = 0$$

Es gibt genau eine Lösung:

Schnittpunkt [mit t=1] ist. (5|5)

⑥

2. Beispiel

$$g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$g_2 \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - t \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\left| \begin{array}{ll} 0 & = 0 \\ 1 & = 2s + t \\ 0 & = 0 \end{array} \right|$$

$$\text{Sei } t = c \Rightarrow s = -\frac{1}{2}c$$

Es gibt unendlich viele Lösungen, also ist

$$g_1 \equiv g_2$$

Eine Parameteraufgabe zum Abschluß

Gibt es Parameter $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ derart, daß

$$g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} b \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ d \end{pmatrix}$$

ⓐ identisch sind ?

ⓑ sich in genau einem Pkt schneiden?

ⓒ echt parallel sind ?

ⓓ windschief sind ?

Mögliche(!!) Vorgehensweise

Das System macht einen komplizierten Eindruck...

<u>Vorgehensweise</u> ① Untersuchung der RV'en la – lu?

② Verbleibende Möglichkeiten

① Wann sind $\begin{pmatrix} b \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ d \end{pmatrix}$ l.a?

$[\text{d.h. } g_1 \parallel g_2 \text{ oder } g_1 \equiv g_2]$

$$\begin{pmatrix} b \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \overset{?}{=} \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ d \end{pmatrix} \qquad \underline{\text{gesucht: } \lambda}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{aligned} b &= 3\lambda \\ 3 &= \lambda \\ 4 &= \lambda d \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad \boxed{\begin{aligned} &\lambda = 3 \text{ mit} \\ &b = 9 \\ &d = \tfrac{4}{3} \end{aligned}}$$

Mit $b=9$, $d=\frac{4}{3}$ [a, c egal] sind die RV l. a.

$$g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4{,}3 \end{pmatrix}$$

$\underline{\underline{la}}$

$g_1 \parallel g_2$ $g_1 \equiv g_2$

⑩

~~④~~

Wir machen den Schnittpunktansatz

$$\mathbb{L} = \emptyset \Rightarrow g_1 \parallel g_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4/3 \end{pmatrix}$$

$b = S$

$d = \frac{4}{3}$

RVen l.a.

$$\Leftrightarrow$$

$$\left| \begin{array}{l} 9r - 3s = c - 1 \\ 3r - 1s = -a \\ 4r - \frac{4}{3}s = 1 \quad | \cdot \frac{3}{4} \end{array} \right| \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} 3r - s = \frac{c-1}{3} \\ 3r - s = -a \\ 3r - s = \frac{3}{4} \end{array} \right|$$

Sehr hübsch

Falls $\frac{c-1}{3} = -a = \frac{3}{4}$ gilt $g_1 \equiv g_2$

Andernfalls ist $g_1 \parallel g_2$

Es bleiben noch die Fälle

→ genau ein Schnittpunkt [RV'en l.u.]

→ windschief [RV'en l.u.]

Wir setzen voraus: RV'en l.u., also

$$b \neq 3 \text{ oder } d \neq \frac{4}{3}$$

$$\left[b = 3 \quad d = \frac{4}{3} \quad \text{l.a!}\right]$$

Wir machen [genau ein Schnittpunkt] den Schnittpunktansatz:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} b \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \stackrel{?}{=} \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ d \end{pmatrix}$$

gesucht: r, s

$$\Longleftrightarrow \begin{array}{l|lll|l} \text{I} & b\cdot r & -3\cdot s & = c-1 & \\ \text{II} & 3\cdot r & -1\cdot s & = 0-a & \Rightarrow \underline{\underline{s = 3r + a}} \\ \text{III} & 4\cdot r & -d\cdot s & = 1 & \end{array}$$

aus I und III berechnen wir r:

I $b \cdot r - 3 \cdot (3r + a) = c - 1$

$b \cdot r - 9r - 3a = c - 1$

$r(b-9) = c - 1 + 3a$

$$\boxed{r = \frac{c - 1 + 3a}{b - 9}}$$

III $4 \cdot r - d \cdot (3r + a) = 1$

$4r - 3dr - da = 1$

$(4 - 3d)r = da$

$$\boxed{r = \frac{da}{4 - 3d}}$$

Damit das System nun <u>eindeutig</u> lösbar ist, muß gelten

$$r = r, \text{ d.h. } \boxed{\frac{c-1+3a}{b-9} = \frac{da}{4-3d}}$$

mit $b \neq 9$ $d \neq \frac{4}{3}$
(siehe oben)

Damit das System keine Lösung hat (bei l.u. RVen!!!), kann man fordern

$$\frac{c-1+3a}{b-9} \neq \frac{da}{4-3d}$$

also keine Lösg, d.h. bei l.u. RV kein gemeinsamer Pkt, also windschief

Ausblick: alles über Ebenen ⑭
usw. [illegible] - [illegible] ⑮
beachte Playlist „Geraden (Scharen)“ 4