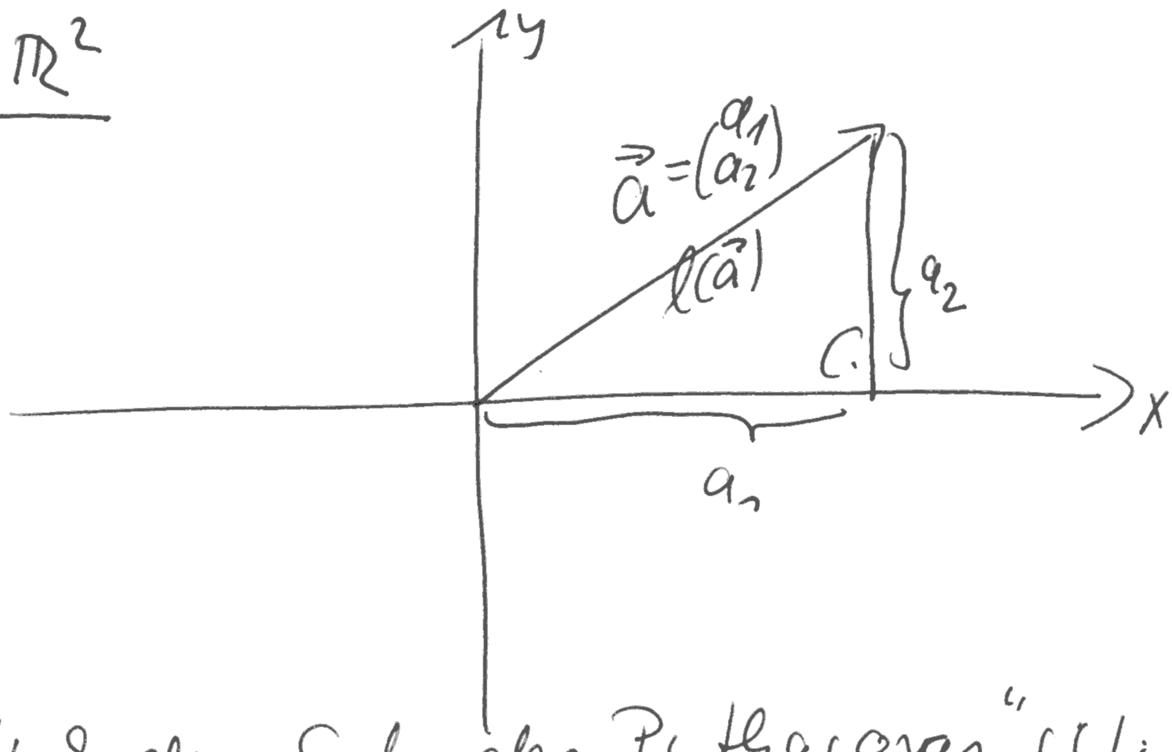
Länge, Winkel, Skalarprodukt

jeder Vektor $\vec{a} \neq \vec{0}$ hat eine Länge:

im $\mathbb{R}^2$



Nach dem „Satz des Pythagoras" gilt:

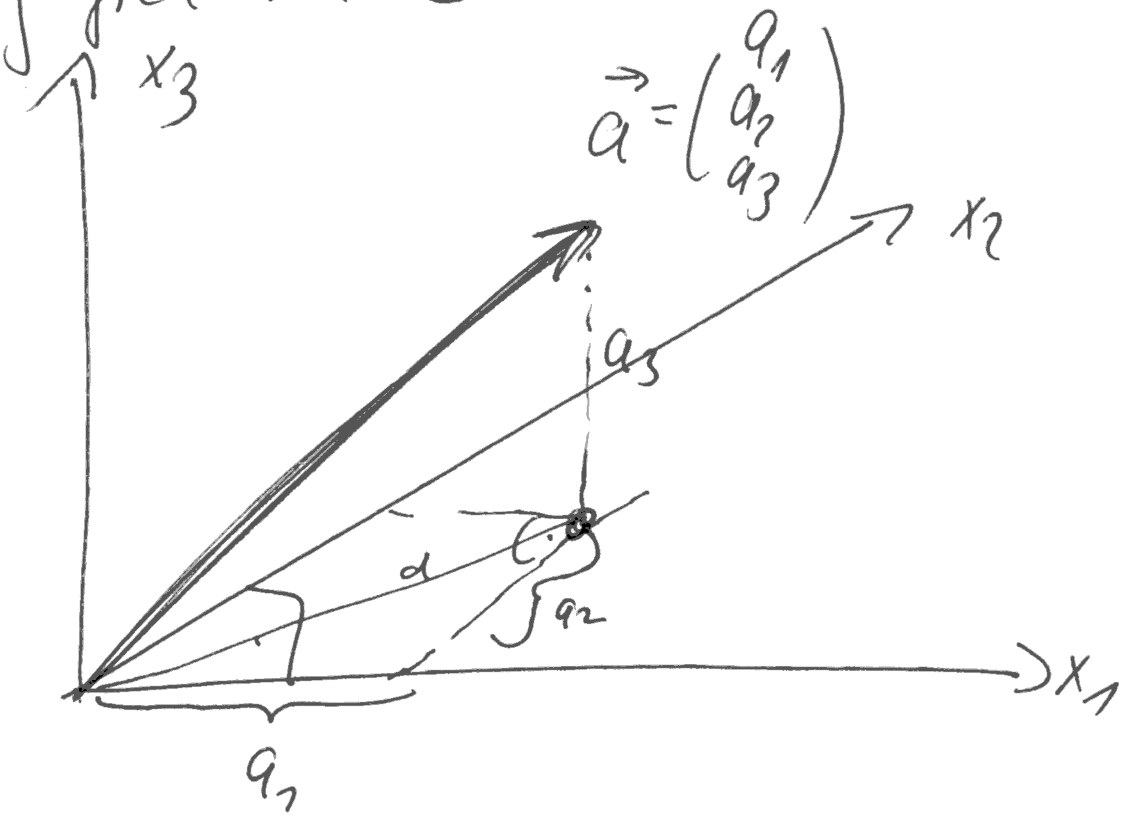
$$[l(\vec{a})]^2 = a_1^2 + a_2^2 \quad | \sqrt{\ }$$

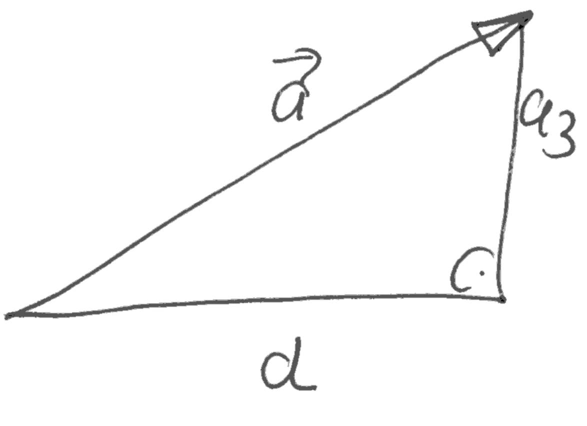
$$l(\vec{a}) = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

Dafür schreibt man

$$\underbrace{|\vec{a}|}_{\text{„Betrag des Vektors a"}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

analog gilt im $\mathbb{R}^3$





$d = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$

und dann gilt wieder nach Pythagoras

$$d^2 + a_3^2 = l(\vec{a})^2 \quad \Big| \sqrt{}$$

$$l(\vec{a}) = \sqrt{d^2 + a_3^2}$$

$$= \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = |\vec{a}|$$

2

Beispiele

(1) Wie lang ist $\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$

$$|\vec{a}| = \sqrt{1^2+2^2+2^2} = \sqrt{9} = 3 \text{ LE'en}$$

(2) Wie muß a_1 in $\vec{a} = \begin{pmatrix}a_1\\0\\1\end{pmatrix}$ gewählt werden, damit $|\vec{a}|=1$ ist?

[$\vec{a}$ heißt dann „Einheitsvektor"]

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2+0^2+1^2} = \sqrt{a_1^2+1}$$

$$|\vec{a}|=1 \iff \sqrt{a_1^2+1} = 1 \quad |(\ )^2$$

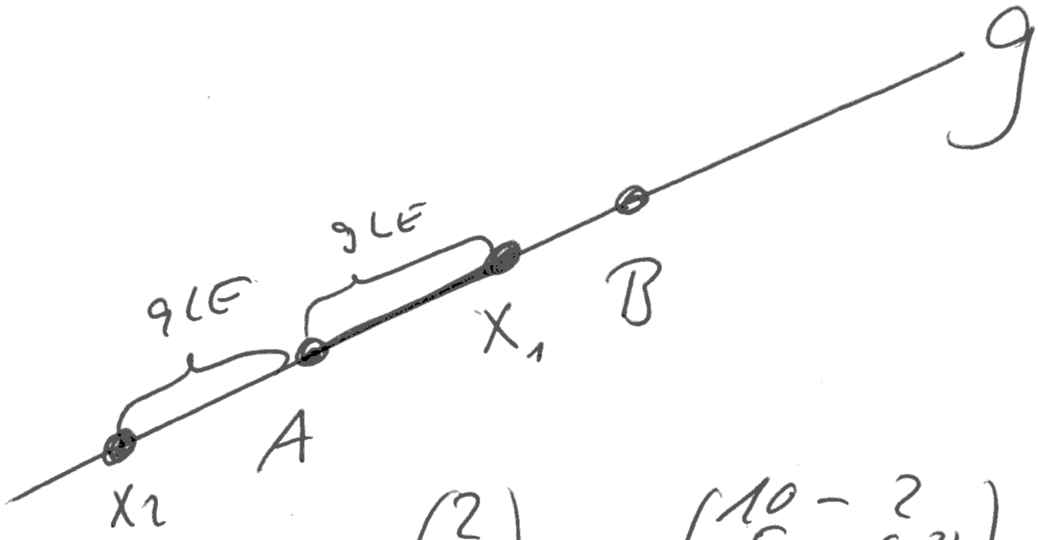
$$a_1^2+1 = 1$$

$$a_1^2 = 0$$

$\vec{a} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ ist Einheitsvektor.

Beispiel: Die Gerade g geht durch $A(2|-3|1)$ und $B(10|5|15)$. Welche Punkte auf g haben von A den Abstand 9?

Lösung:



$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}10-2\\5-(-3)\\15-1\end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}8\\8\\14\end{pmatrix}$$

Sei $X = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ der gesuchte Punkt.

Es muß gelten

$$|\vec{X}| = 9$$

Beispiel

g geht durch A(2|-3|1) und B(10|5|15)

Gesucht sind 2 Punkte auf g mit

$|\overrightarrow{P_1A}| = |\overrightarrow{P_2A}| = 9$

Lösung Hinter dem Wort „Abstand" verbirgt sich oft – wie hier – der Ausdruck „Länge eines Vektors" $\overrightarrow{P_1A}$ bzw $\overrightarrow{P_2A}$ mit $|\overrightarrow{P_1A}| = |\overrightarrow{P_2A}| = 9$

Da sowohl P_1 wie auch P_2 auf g liegen, setzen wir an

$$\underbrace{P \hat{=} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 10-2 \\ 5-(-3) \\ 15-1 \end{pmatrix}}_{g\,!}$$

$$P \hat{=} \begin{pmatrix} 2+8r \\ -3+8r \\ 1+14r \end{pmatrix}$$

Und sehen zu

$$|\vec{PA}| = \left\| \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2+8r \\ -3+8r \\ 1+14r \end{pmatrix} \right\| \overset{!}{=} 9$$

$$\Longleftrightarrow \left\| \begin{pmatrix} -8r \\ -8r \\ -14r \end{pmatrix} \right\| \overset{!}{=} 9$$

$$\Longleftrightarrow \sqrt{64r^2 + 64r^2 + 196r^2} = 9 \quad |()^2$$

$$\cancel{\sqrt{324r^2}} = 81$$

$$r^2 = \frac{81}{324} = \frac{27}{72} = \frac{9}{24} = \frac{3}{8}$$

$$\cancel{= \frac{9}{2}}$$

$$= \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

$$r_1 = +0.5 \quad r_2 = -0.5$$

$$P_1: \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$P_2: \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -8 \end{pmatrix}$$

Das Skalarprodukt

Das Skalarprodukt zweier Vektoren ist wie folgt festgelegt:

im $\mathbb{R}^2$: $\underbrace{\vec{a} \cdot \vec{b}}_{\text{2 Vektoren}} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \underbrace{a_1 b_1 + a_2 b_2}_{\text{reelle Zahl}}$

2 Vektoren $\longleftrightarrow$ reelle Zahl

im $\mathbb{R}^3$: $\vec{a}\,\vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$

Man kann leicht nachrechnen:

$$\vec{a}\,\vec{b} = \vec{b}\,\vec{a}$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \cdot \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

$$r(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (r\vec{a})b = \vec{a} \cdot (r\vec{b})$$

Beispiele

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 2 \cdot 3 + 1 \cdot 4 = 10$$

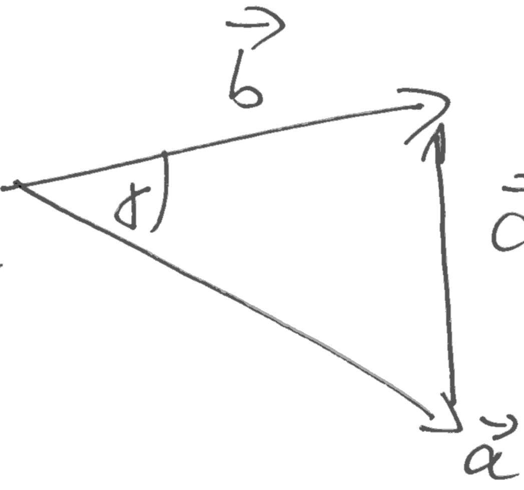
$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 3 \cdot 1 + 4 \cdot 0 = 3$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot (-3) + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = -3$$

usw

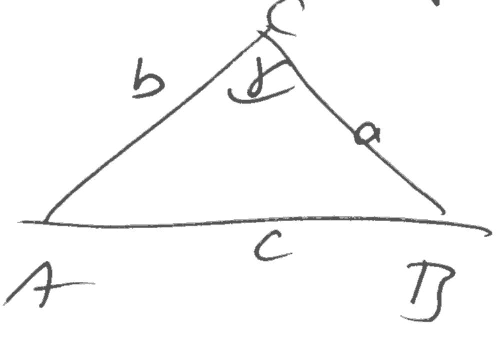
Daß man mit dem <u>Skalarprodukt</u> auch <u>Winkel zwischen 2 Vektoren</u> messen kann, ist erstaunlich, wahnsinnig wichtig und so herleitbar (für $\mathbb{R}^3$ ganz analog!)

$\sphericalangle\, \vec{a}, \vec{b} = \gamma$



$\vec{c} = -\vec{a} + \vec{b}$
$= \vec{b} - \vec{a}$

Nach dem „cos-Satz" gilt



$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma$$

Das überträgt man

$$|\vec{c}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\gamma$$

$$|\vec{c}|^2 - |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 = -2|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\gamma$$

oder $$\cos\gamma = \frac{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{c}|^2}{2|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$$

Nun vereinfacht man den Zähler:

$$|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{c}|^2$$

$$= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |(\vec{b}-\vec{a})|^2$$

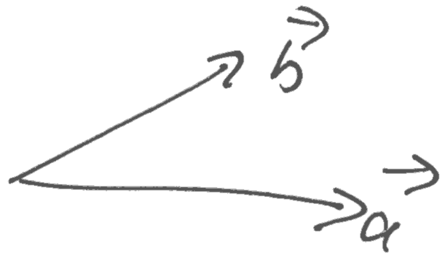
$$= a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 - \left[(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2\right]$$

$$= \cancel{a_1^2} + \cancel{a_2^2} + \cancel{b_1^2} + \cancel{b_2^2} - \left[\cancel{b_1^2} - 2a_1b_1 + \cancel{a_1^2} + \cancel{b_2^2} - 2a_2b_2 + \cancel{a_2^2}\right]$$

$$= \underbrace{2a_1b_1 + 2a_2b_2}$$

$$= 2\cdot \underbrace{\vec{a}\cdot\vec{b}}_{\text{Skalarp}}$$

② $\vec{a} = \begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

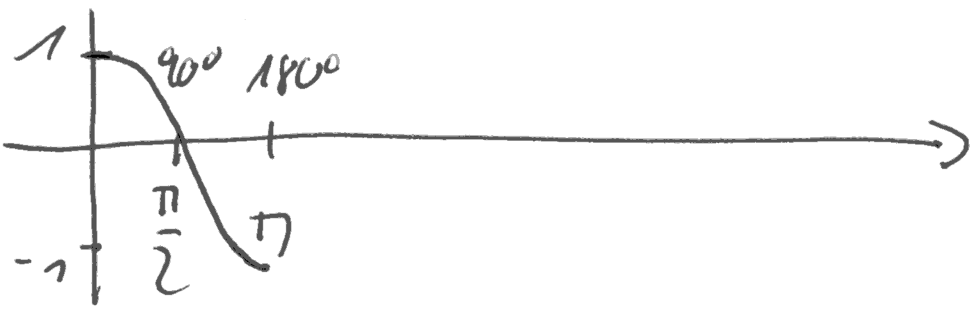


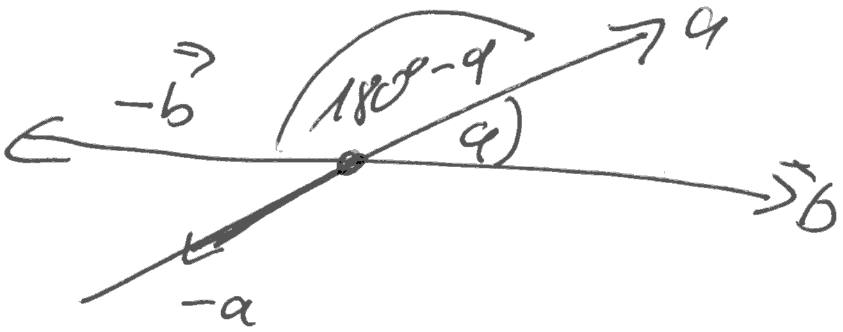
$$\cos\varphi = \frac{\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}}{\sqrt{1+4+1}\cdot\sqrt{1+1+1}}$$

$$= \frac{-1-2+1}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{3}} = \frac{-2}{\sqrt{18}} \approx -0{,}471$$

$\varphi \approx 118{,}1^\circ$

Erklärung





Man erhält

$$\cos\gamma = \frac{2\cdot\vec{a}\vec{b}}{2|\vec{a}||\vec{b}|}$$

$$\Leftrightarrow$$

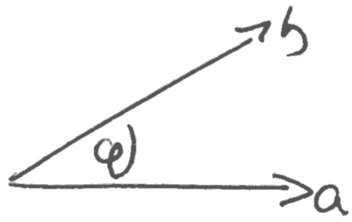
$$\cos\gamma = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} \Leftrightarrow \boxed{\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\gamma}$$

oder

$$\boxed{\vec{a}\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}$$

Beispiele

(1) $\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$



$$\cos\varphi = \frac{\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}}{\sqrt{1+16}\cdot\sqrt{9+4}}$$

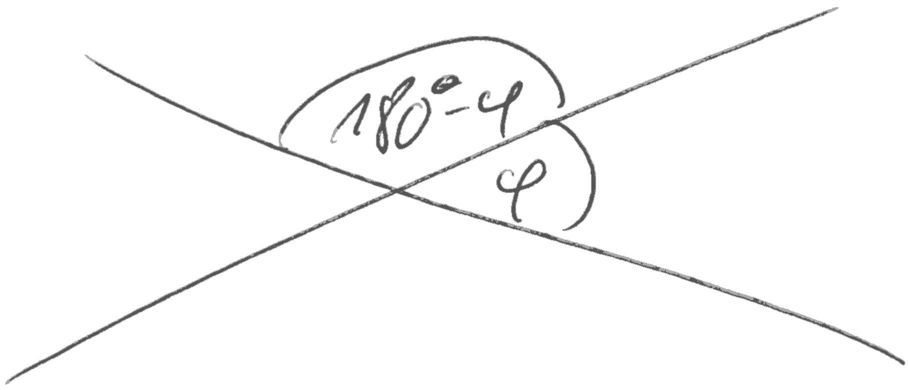
$$= \frac{1\cdot3 + 4\cdot2}{\sqrt{17}\cdot\sqrt{36}}$$

$$= \frac{11}{\sqrt{17}\cdot\sqrt{36}} \approx 0{,}445$$

$$\varphi \approx 63{,}6^\circ$$

Übereinkunft

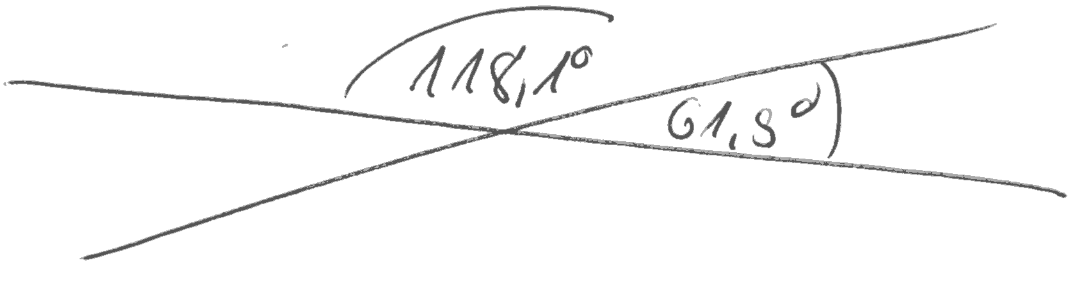
An einer „Vektorkreuzung" liegen stets 2 Winkel an:



Liefert das Skalarprodukt einen Wert von $> 90°$, so einigt man sich auf den kleineren Winkel.

Beispiel 2 $\varphi \approx 118{,}1°$ man wählt

$$180° - 118{,}1° \approx \underline{61{,}9°}$$



Ausblick

→ Vektorprodukt

→ Normalenform [Hesseform] der Ebene

→ Lagen: Ebene – Ebene
Ebene – Gerade

→ Schnittwinkel

→ Abstände [z.B. Lotfußpunkt erfordert]

Höhere Mathematik

für

Studienanfänger,

Nebenfächler ... usw

$\boxed{\text{Komplexe Zahlen}}$

Video 6

Komplexe Zahlen

Die „Qual" der „richtigen" Einführung:

Entweder so $x^2 = -1$

$x = \pm\sqrt{-1}$ also

$i := +\sqrt{-1}$ „imaginäre Einheit"

oder so $a + b \cdot i$ mit $i = \sqrt{-1}$

also z. B $\underline{3 + 4i}$ ist 'ne

„komplexe Zahl"

oder etwa so $a, b \in \mathbb{R}$

(a, b) heißt „komplexe Zahl"

[so hat es zuerst W. R. Hamilton 1805-1865 gemacht] oder so $(a,b) \leftrightarrow a+b\cdot i$

mit $a,b \in \mathbb{R}$, $i=\sqrt{-1}$ und einer eindeutigen Beziehung zwischen beiden

---

Ich plädiere für Hamilton

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ beliebig, $z_1=(a_1,b_1)$ und $z_2=(a_2,b_2)$ seien „komplexe Zahlen".
Man legt fest:

→ $z_1=z_2$: $a_1=a_2$ und $b_1=b_2$

→ z_1+z_2 : $z_1+z_2=(a_1,b_1)+(a_2,b_2)$
$=(a_1+a_2, b_1+b_2)$

→ $z_1\cdot z_2$: $z_1 z_2=(a_1,b_1)\cdot(a_2 b_2)$
$=(a_1a_2-b_1b_2, a_1b_2+a_2b_1)$

Mit den so definierten „Rechenarten" ist $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ ein Körper.
Ich beschränke mich nur auf den Nachweis des Distributivgesetzes:

$$\boxed{(z_1+z_2)\cdot z_3 = z_1 z_3 + z_2 z_3}$$

Sei $z_1 = (a_1, b_1)$
$z_2 = (a_2, b_2)$
$z_3 = (a_3, b_3)$

Zum Beweis der obigen Gleichung berechnet man linke und rechte Seite und beweist Gleichheit

<u>l.S.</u> $(z_1+z_2)\cdot z_3 = \big((a_1,b_1)+(a_2,b_2)\big)\cdot(a_3,b_3)$

$$= \big(\underbrace{(a_1+a_2}_{a_1}, \underbrace{b_1+b_2)}_{b_1}\big)\cdot(\underbrace{a_3}_{a_2}, \underbrace{b_3}_{b_2})$$

$z_1\cdot z_2$
$= (a_1a_2 - b_1b_2, a_1b_2 + a_2b_1)$

$$= \big((a_1+a_2)a_3 - (b_1+b_2)\cdot b_3, (a_1+a_2)b_3 + a_3(b_1+b_2)\big)$$

$$= \big(a_1a_3 + a_2a_3 - b_1b_3 - b_2b_3, a_1b_3 + a_2b_3 + \underset{3}{a_3b_1} + a_3b_2\big)$$

r.S. $z_1 z_3 + z_2 z_3$

$= (a_1 b_1) \cdot (a_3 b_3) + (a_2 b_2)(a_3 b_3)$

$= (a_1 a_3 - b_1 b_3, a_1 b_3 + a_3 b_1) + (a_2 a_3 - b_2 b_3, a_2 b_3 + a_3 b_2)$

$= (a_1 a_3 - b_1 b_3 + a_2 a_3 - b_2 b_3, a_1 b_3 + a_3 b_1 + a_2 b_3 + a_3 b_2)$

$= a_1 a_3 + a_2 a_3 - b_1 b_3 - b_2 b_3, a_1 b_3 + a_2 b_3 + a_3 b_1 + a_3 b_2)$

stimmt mit r.S. überein

4

Erwähnenswert

① Das neutrale Element bzgl „+" ist $(0|0)$, denn

$$(a,b)+(0,0) = (a+0,\ b+0) = (a,b)$$

② Das neutrale Element bzgl „·" ist $(1,0)$ denn

$$(a,b)\cdot(1,0) = (a\cdot 1 - b\cdot 0,\ a\cdot 0 + 1\cdot b)$$
$$= (a,b)$$

③ Das inverse Element bzgl „+" ist $(-a,-b)$, denn

$$(a,b)+(-a,-b) = (a-b,\ b-b) = (0,0)$$

Nachzuprüfen bleibt noch, wie man 2 komplexe Zahlen durcheinander dividiert, also:
gibt es zu $z_1 = (a_1, b_1)$ und $z_2 = (a_2, b_2)$ eine Zahl der Form $\frac{z_1}{z_2}$ oder anders gefragt

gibt es eine Zahl $z_3 = (a_3\ b_3)$ derart, daß

$$\boxed{z_2 \cdot z_3 = z_1 \text{ ist}}?$$

Wir nehmen einmal an, die letzte Gleichung wäre richtig, dann müßte ja gelten

$$z_2 \cdot z_3 = z_1$$

$$\Longleftrightarrow \quad (a_2 b_2) \cdot (a_3 b_3) = (a_1 b_1)$$

$$\Longleftrightarrow \quad (a_2 a_3 - b_2 b_3, a_2 b_3 + a_3 b_2) = (a_1, b_1)$$

$$\Longleftrightarrow \begin{array}{l|l|} \mathrm{I} & a_2 a_3 - b_2 b_3 = a_1 \\ \mathrm{II} & a_2 b_3 + a_3 b_2 = b_1 \end{array}$$

gesucht a_3, b_3

6₁

$$\underline{\underline{a_3}}\, a_2 = a_1 + b_2 b_3 \quad \Big| \cdot a_2$$

$$\underline{\underline{a_3}}\, b_2 = b_1 - a_2 b_3 \quad \Big| \cdot b_2$$

$$a_2^2\, \underline{\underline{a_3}} = a_1 a_2 + a_2 b_2 b_3$$

$$\underline{\underline{a_3}}\, b_2^2 = b_1 b_2 - a_2 b_2 b_3 \quad \Big| +$$

$$a_2^2 a_3 + a_3 b_2^2 = a_1 a_2 + b_1 b_2$$

$$a_3 = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{\underbrace{a_2^2 + b_2^2}_{\neq 0}}$$

Und analog

$$b_3 = \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}$$

C_2

Damit hat man insgesamt nachgewiesen

Die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ bilden einen Körper.

G_3

$\boxed{\text{Besonderheiten}}$

[1] Betrachtet man die „besonderen" komplexen Zahlen $(a,0)$ $a \in \mathbb{R}$, so sieht man, daß das gerade alle reellen Zahlen sind.

$\boxed{\text{Die reellen Zahlen sind echte Teilmenge der komplexen Zahlen}}$

[2] Ist $z = (a, b)$ so heißt

a „Realteil von z"

b „Imaginärteil von z"

[3] Die speziellen komplexen Zahlen $(0, b)$ heißen „imaginäre" Zahlen.

[4] $(0,1)$ heißt „imaginäre Einheit"; man schreibt auch $i := (0,1)$

EULER

5 für $i = (0,1)$ gilt

$$\underset{a_1\,b_1}{(0,1)} \cdot \underset{a_2\,b_2}{(0,1)} = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1,\ 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1)$$

$$= (-1, 0) = -1$$

also ist überraschenderweise:

$\boxed{i^2 = -1}$ auch die Schreibweise

sollte eher vermieden werden $\rightarrow$ $i = \sqrt{-1}$ ist verwendet worden.

Wegen $(a,b) = (a,0) + (0,b)$

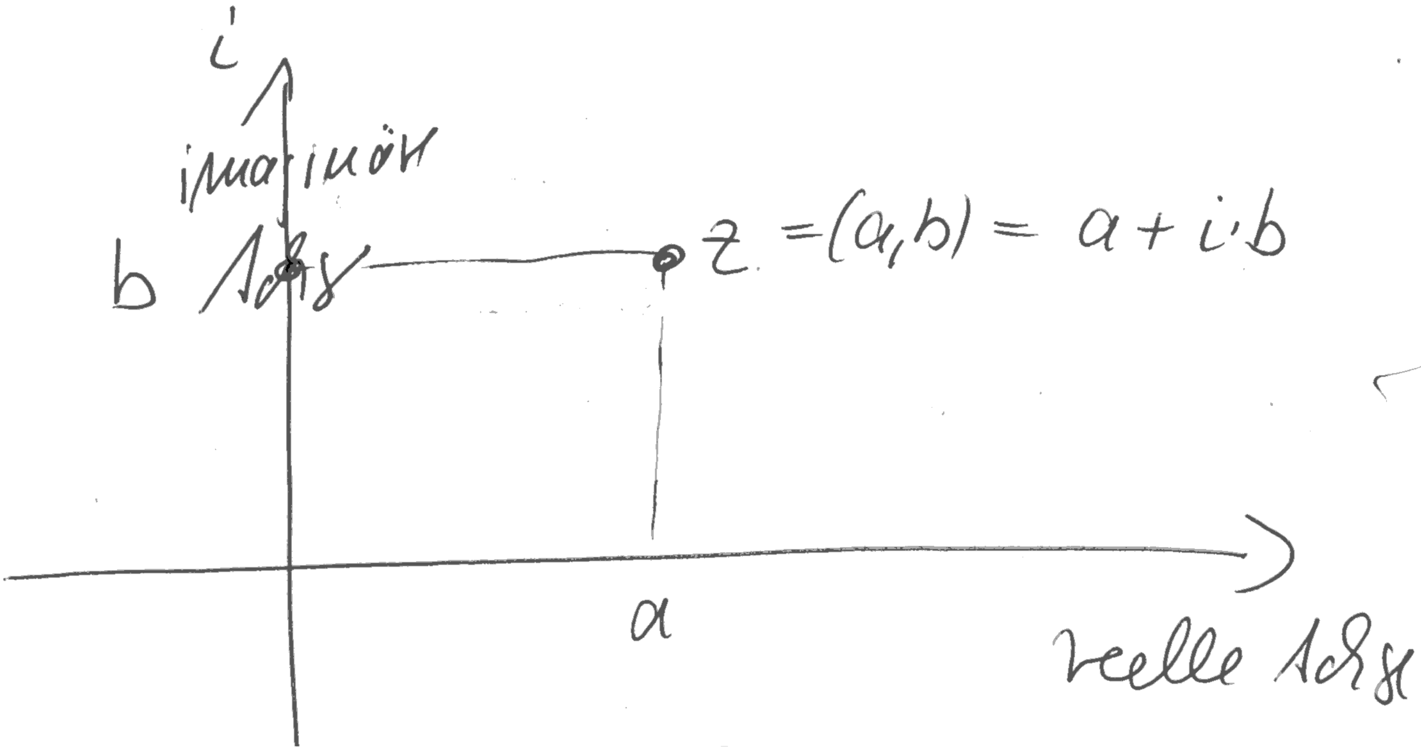
$$= (a,0) + (0,1) \cdot (b,0)$$

kann man auch schreiben:

$$(a,b) = a + i \cdot b$$

Darstellung der komplexen Zahlen

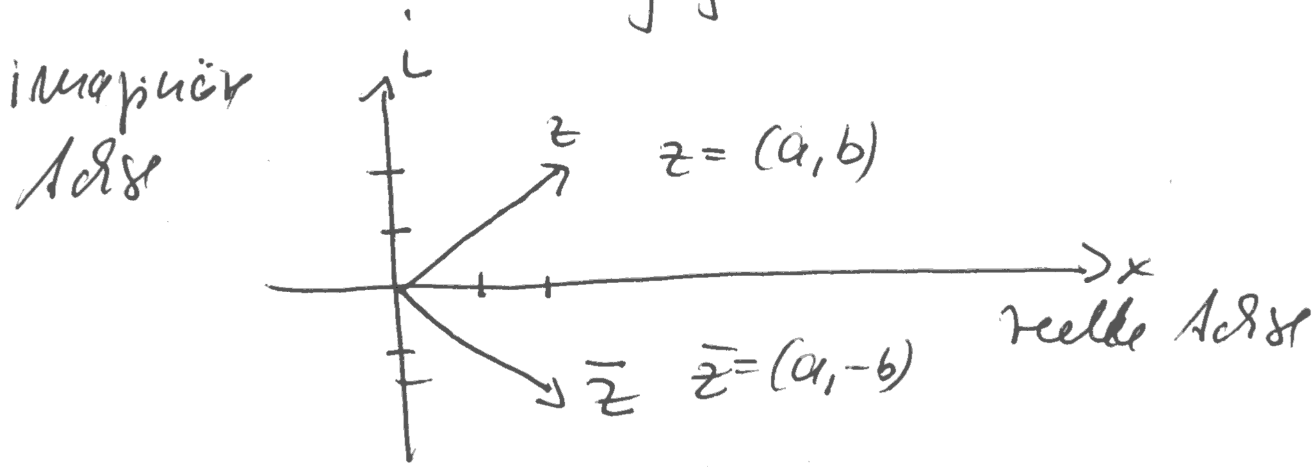
komplexe Zahlenebene ≙ Gaußsche Zahlenebene ≙ z-Ebene



Was man wissen sollte:

Konjugiert komplexe Zahl:

$z = a + i\cdot b \qquad \underbrace{\bar{z} := a - ib}_{\text{Konjugiert komplexe Zahl}}$



Betrag von z

$$|z| := \sqrt{\bar{z}z}$$
$$= \sqrt{(a-ib)\cdot(a+ib)}$$
$$\overset{!}{=} a^2 + iab - iab - i^2b^2$$
$$= a^2 - (-1)\cdot b^2$$
$$= \underline{\underline{a^2+b^2}}$$

Rechnen mit konjugiert komplexen Zahlen

① $\overline{\overline{z}} = z$

$\overline{\overline{z}} = \overline{(a - ib)} = a + ib = z$

② $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

$z_1 = a_1 + ib_1$

$z_2 = a_2 + i \cdot b_2$

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{(a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2)}$$

$$= \overline{(a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)}$$

$$= (a_1 + a_2) - i(b_1 + b_2)$$

$$= a_1 - ib_1 + a_2 - ib_2$$

$$= \overline{z_1} + \overline{z_2}$$

(h)

(3) $\bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 = \overline{z_1 \cdot z_2}$

$$\bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 = (a_1 - ib_1)(a_2 - ib_2)$$

$$= a_1 a_2 - i a_1 b_2 - i a_2 b_1 + i^2 b_1 b_2$$

$$= a_1 a_2 - i(a_1 b_2 + a_2 b_1) - b_1 b_2$$

$$= (a_1 a_2 - b_1 b_2 - i(a_1 b_2 + a_2 b_1)$$

$$= \underline{\underline{\overline{z_1 \cdot z_2}}}$$

(4) $\underline{\underline{z \cdot \bar{z}}} = (a + ib)(a - ib)$

$$= a^2 - iab + iab - i^2 b^2$$

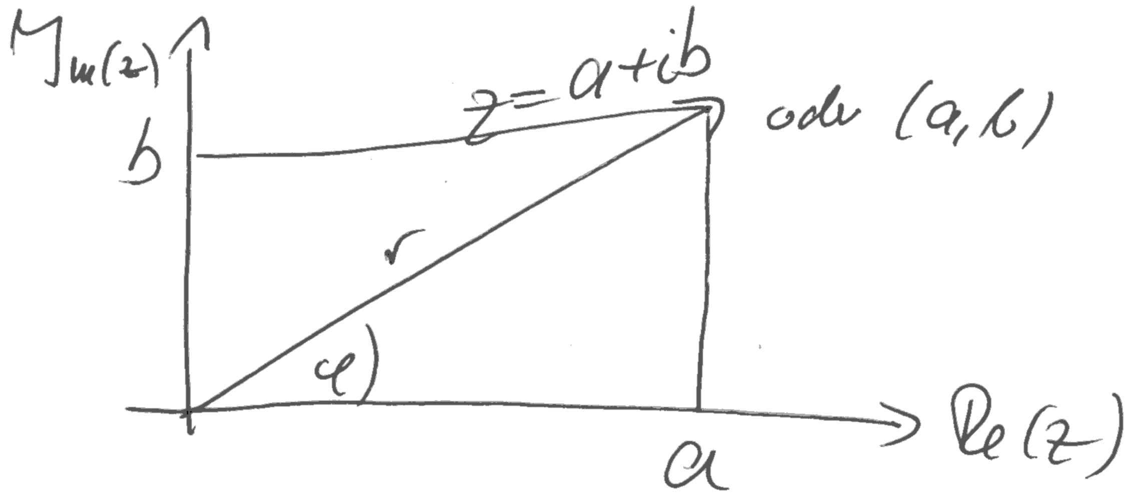
$$= a^2 - (-1) \cdot b^2$$

$$= \underline{a^2 + b^2}$$ „Norm von z"

Darstellungsformen komplexer Zahlen $z = (a,b)$

① $\underbrace{z = a + ib}_{\text{Normalform}}$ „algebraisch" oder „kartesisch"

② Trigonometrische Form



$$\cos\varphi = \frac{a}{r} \Rightarrow a = r \cdot \cos\varphi$$

$$\sin\varphi = \frac{b}{r} \Rightarrow b = r \cdot \sin\varphi$$

Man erhält

$$\underline{\underline{z}} = a + ib$$

$$= r \cdot \cos\varphi + i r \sin\varphi$$

$$\underline{\underline{= r \cdot [\cos\varphi + i \sin\varphi]}}$$

(3) Die Exponentialform

nicht unbedingt Thema einer „Einführung ..."

Unter Verwendung der sog. „Euler formel"

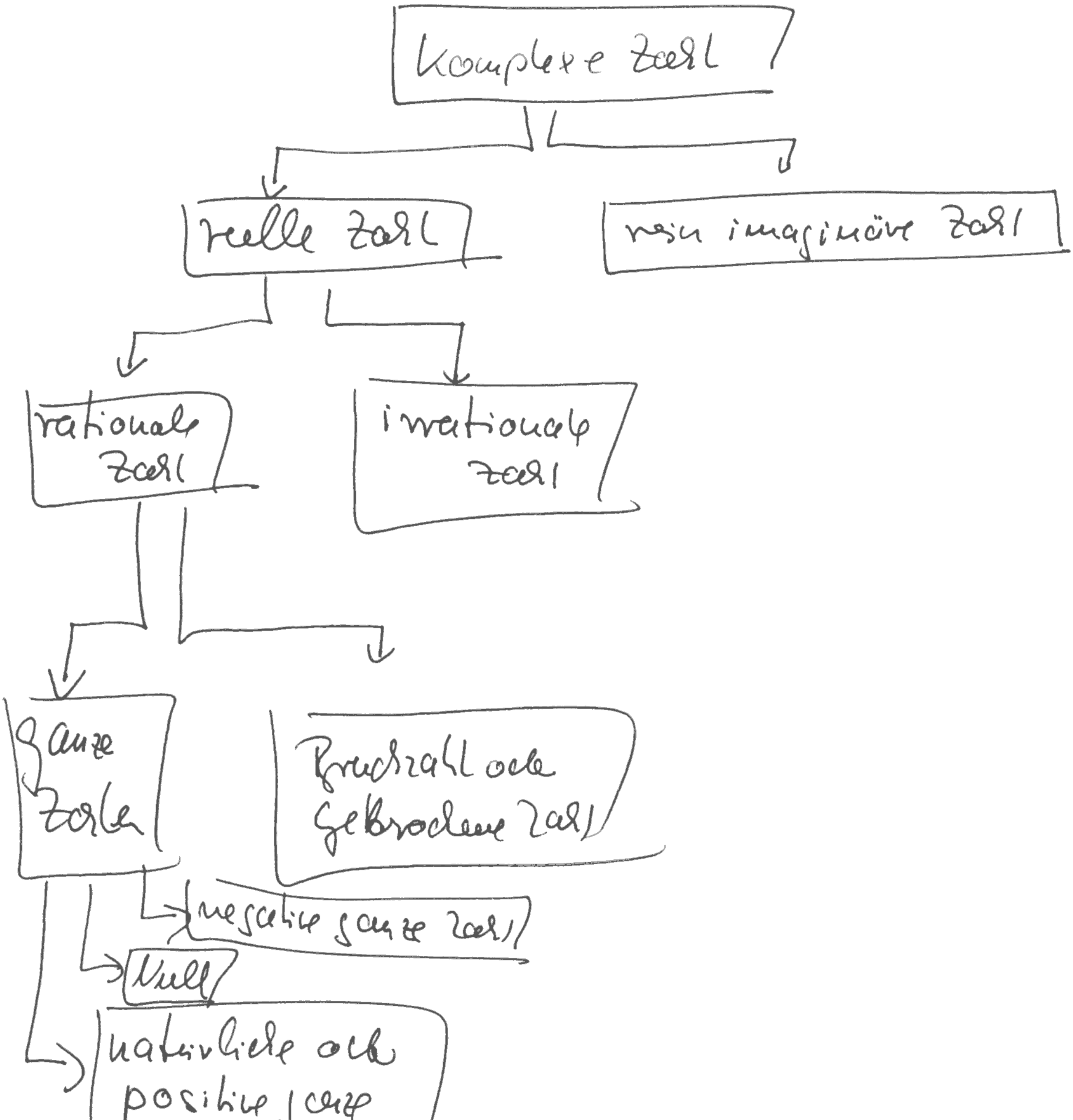
$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \cdot \sin\varphi$$

erhält man

$$z = r [\cos\varphi + i \sin\varphi]$$

$$\underline{\underline{= r \cdot e^{i\varphi}}}$$

Aufbau des Zahlensystems



Ausblick: Binomialkoeffizient und binomischer Lehrsatz