Vektorprodukt

Erklärungen, Anwendungen, Beispielaufgaben

Spatprodukt

Läßt man sich von der Überlegung leiten, ob es zu 2 l.u. Vektoren $\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$ $\vec{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$ <u>einen</u> (oder mehrere) Vektoren $\vec{c}$ gibt, die zu $\vec{a}$ und zu $\vec{b}$ senkrecht stehen, so ergibt sich folgende Rechnung:

)

1

Beispiel Seien $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ l.u.

Wenn $\vec{a} \perp \vec{b}\ \vec{n}$ dann ist $\underbrace{\vec{a} \cdot \vec{n}}_{=0} = |\vec{a}| \cdot |\vec{n}| \cdot \underbrace{\cos 90°}_{0}$

also $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = 1n_1 + 2n_2 + 1n_3 \stackrel{!}{=} 0$

und $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = 2n_1 + 1n_2 + 0n_3 = 0$

Das LGS ist „unterbestimmt": Sei $n_3 = 1$ [z.B.]

$$\begin{vmatrix} n_1 + 2n_2 = -1 \\ 2n_1 + n_2 = 0 \end{vmatrix} \cdot 2 \quad \ominus$$

$$n_1 + 2n_2 = -1$$
$$0 - 3n_2 = 2 \quad \Rightarrow n_2 = -\frac{2}{3} \qquad \Rightarrow n_1 = -1 + \frac{4}{3} = \frac{1}{3}$$

also $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ -2/3 \\ 1 \end{pmatrix}$

2

Der Vektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ -2/3 \\ +1 \end{pmatrix}$ steht senkrecht

auf $\vec{a} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

<u>Bemerkungen</u>

(1) Natürlich gibt es – das LGS ist ja <u>stets</u> unterbestimmt – <u>unendlich viele</u> Lösungen.

(2) Die obige Rechnung lässt sich allgemein durchführen; man erhält

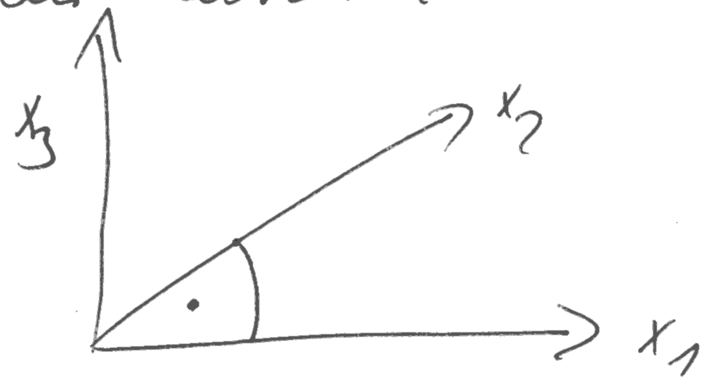
$\vec{n} \perp \vec{a}$ und $\vec{n} \perp \vec{b}$ und

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=}: \vec{a} \times \vec{b}$$

$\vec{a} \times \vec{b}$ heißt <u>Vektorprodukt</u> oder <u>Kreuzprodukt</u> der Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$

(3) $\vec{a}, \vec{b}$ müssen (!!!) l.u. sein

(4) In der Physik nennt man – in dieser Reihenfolge – die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}$ ein <u>Rechtssystem</u> (wie z. B. die Koordinatenachsen im $\mathbb{R}^3$)



Rechtssystem → rechte-Hand-Regel

→ Daumen x_1
Zeigefinger x_2
Mittelfinger x_3
[re Hand mit ~~Re~~ Hand rücken nach unten]

(4)

Rechengesetze für $\vec{a} \times \vec{b}$

(1) $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$

(2) $(r \cdot \vec{a}) \times \vec{b} = r \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a} \times (r\vec{b})$

(3) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$

Beweis z.B. von 1

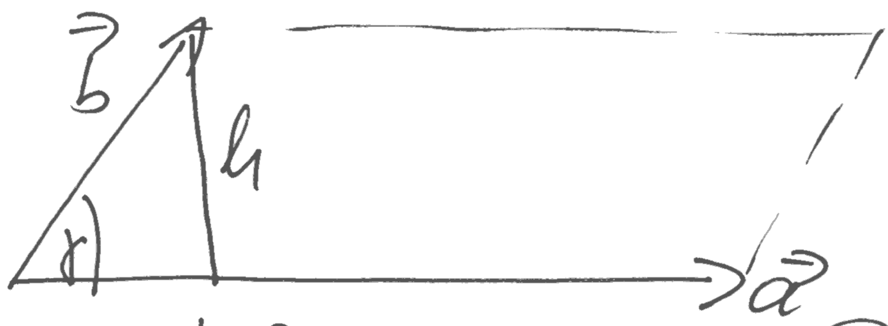
Wir berechnen linke Seite und rechte Seite und zeigen Gleichheit

l.S. $\vec{a} \times \vec{b} \underset{\text{nach Def}}{=} \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$

r.S. $-(\vec{b} \times \vec{a}) = -\begin{pmatrix} b_2 a_3 - b_3 a_2 \\ b_3 a_1 - b_1 a_3 \\ b_1 a_2 - b_2 a_1 \end{pmatrix}$

$= +\begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 + a_1 b_3 \\ a_1 b_2 + a_2 b_1 \end{pmatrix}$ $\boxed{\text{r.S.}}$!

1. Anwendung



Für den Flächeninhalt eines Parallelogramms gilt

$$A_{Pa} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\gamma$$ und es

ist $$|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\gamma \overset{!}{=} |\vec{a}\times\vec{b}|$$

Der Beweis ist „trickreich", man beweist nämlich die Richtigkeit der Formel

$$|\vec{a}|^2\cdot|\vec{b}|^2\cdot\sin^2\gamma = |\vec{a}\times\vec{b}|^2$$, indem

man „die Koordinatenform" beider Seiten ausrechnet. [ist 'ne Wahnsinnsrechnerei!]

Zunächst gilt $\sin\gamma \triangleq \frac{G}{H} \Leftrightarrow \sin\gamma = \frac{h}{|\vec{b}|}$

also $h = |\vec{b}|\cdot\sin\gamma$; dann ist

$$A_{Pa} = \underline{G\cdot h} = |\vec{a}|\cdot h$$
$$= \underline{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\gamma}$$ [erste Formel]

Beweis der Gleichung

$$|\vec{a} \times \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 \cdot \sin^2\gamma$$

---

l.S. $\quad \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$

$$|\vec{a} \times \vec{b}|^2 = \left| \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} \right|^2$$

$$= (a_2 b_3 - a_3 b_2)^2 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2$$

$$= a_2^2 b_3^2 - 2 a_2 a_3 b_2 b_3 + a_3^2 b_2^2$$
$$+ a_3^2 b_1^2 - 2 a_1 a_3 b_1 b_3 + a_1^2 b_3^2$$
$$+ a_1^2 b_2^2 - 2 a_1 a_2 b_1 b_2 + a_2^2 b_1^2$$

$$\overset{!}{=} (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) \cdot (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2$$

[Da fehlen jetzt einige (kleine) Rechen=schritte!]

r.S. $|\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 \cdot \sin^2\gamma$ wegen $\sin^2\gamma + \cos^2\gamma = 1$

$= |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 \cdot (1 - \cos^2\gamma)$ Klammer aufgelöst

$$= |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 - \underbrace{|\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 \cdot \cos^2\gamma}_{\text{Skalarprodukt}^2}$$

$$= |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$$

$$= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1 b_1 + a_2 b_1 + a_3 b_3)^2$$

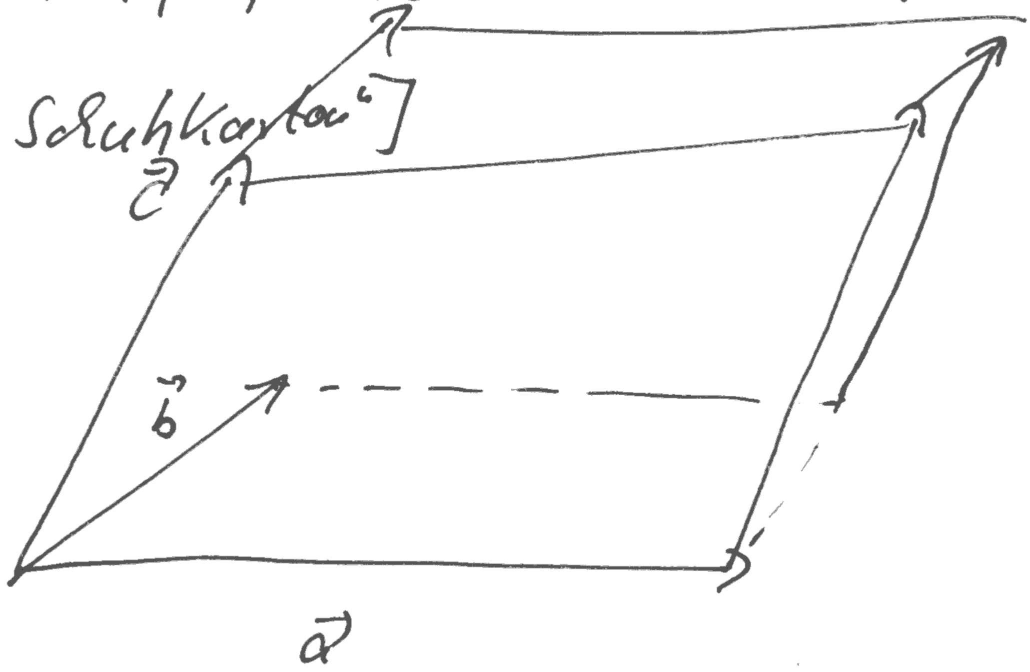
also insgesamt

$$A_{Pa} = |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\gamma$$

2. Anwendung

3 [l.u.] Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ bilden einen „Spat“

(„ein schiefer Schuhkarton“)



Es gilt

$$V_{Spat} = \left| \underbrace{\underbrace{(\vec{a} \times \vec{b})}_{\text{Vektorpr.}} \cdot \vec{c}}_{\text{Skalarpr.}} \right|$$

Dieses „<u>Doppelprodukt</u>“ <u>$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot c$</u> wird auch <u>Spatprodukt</u> genannt.

3. Anwendung: Vergleicht man Volumen_{Pyr} und Volumen_{Prisma}, so gilt

$$V_{Pyr} = \frac{1}{3}\,\text{Vol}_{Prisma} \quad \left[\begin{array}{c}\text{gleiche Grund-}\\ \text{fläche + Höhe}\end{array}\right]$$

Ein Prisma mit dreieckiger Grundfläche ist die Hälfte eines Spats, also gilt

$$V_{\substack{\text{dreiseitige}\\ \text{Pyramide}}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\,\left|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}\right|$$

$$= \frac{1}{6}\left|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}\right|$$

M

Beispiel

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1. $\left| (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} \right|$

$$= \left| \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

$$= \left| \begin{pmatrix} 2 \cdot 0 - 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 2 - 1 \cdot 0 \\ 1 \cdot 1 - 2 \cdot 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

$$= \left| \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right|$$

$$= \left| (-1)(-1) + 2 \cdot 1 + (-3) \cdot 0 \right|$$

$$= \left| 1 + 2 \right| = \left| 3 \right| = \underline{\underline{3}}$$

12

Ausblick

1. Ebenenformen
2. Lage Ebene – Gerade alle Möglichkeiten mit Beispielen

www.raphael-biere.de

1 Normalenform 551

2 Lagen: Ebene $\leftrightarrow$ Ebene

3 Lagen: Geraden $\leftrightarrow$ Ebenen

Geradenscharen und Ebenenscharen:

Seite

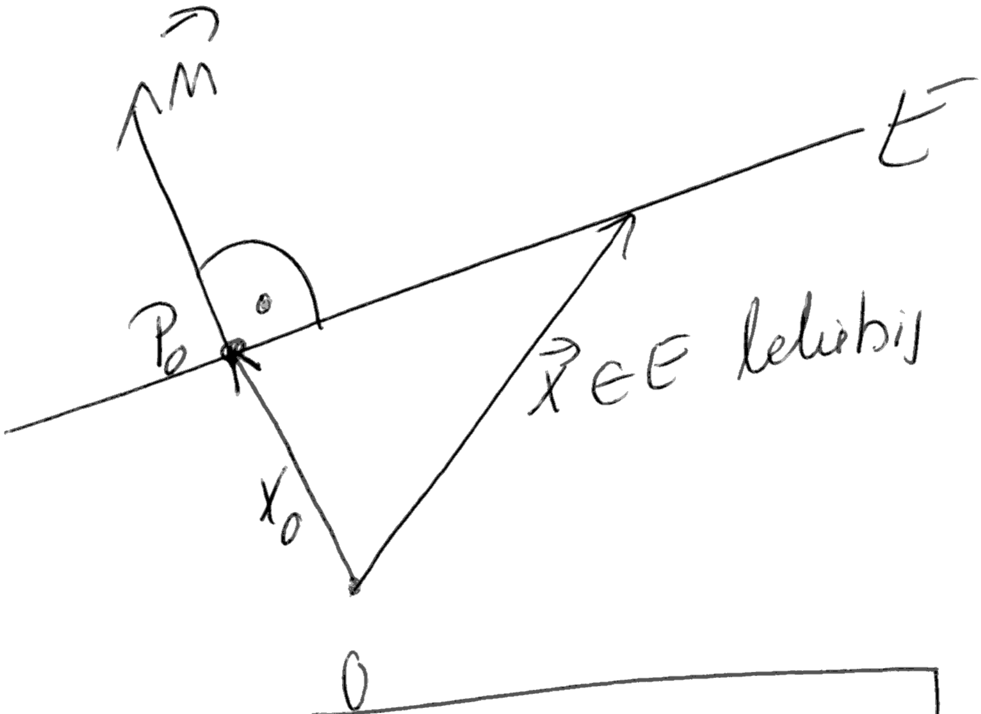
Video 22 + 23 + 24

Playlist „Geraden(scharen)"

„Ebenen (scharen)"

Normalenform

nur für Ebenen!



Offenbar gilt $\boxed{(\vec{x}-\vec{x}_0)\cdot\vec{n}=0}$

Normalenform der Ebene

Variante 1 $\quad \vec{n}\vec{x}-\vec{n}\vec{x}_0=0$

Variante 2 $\quad \vec{n}\vec{x}=\vec{n}\vec{x}_0$

Variante 3 $\quad n_1x_1+n_2x_2+n_3x_3 = c$

„Koordinatenform der Ebene"

„algebraische Form der Ebene"

Beispiel $\quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad P_0(2/3/4)$

$$\vec{n}(\vec{x}-\vec{x}_0)=0 \iff \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\left[\vec{x}-\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right]=0$$

$$\vec{n}\vec{x}=\vec{n}\vec{x}_0 \iff \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\vec{x}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\vec{x}=1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4=20$$

Koordinatenform $\iff 1x_1+2x_2+3x_3=20$

Beispiel $\quad E: \vec{x}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}+r\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}+s\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

gesucht $\rightarrow$ Normalenform

$\rightarrow$ Koordinatenform

Man bestimmt $\vec{n} \perp \vec{a}$ und $\vec{n} \perp \vec{b}$

$$\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 - 2\cdot 3 \\ 3\cdot 1 - 2\cdot 1 \\ 2\cdot 2 - 1\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Probe: $\begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = -10+1+9=0$ ✓

$\begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = -5+2+3=0$ ✓

$E: \boxed{\vec{n}\vec{x} = \vec{n}\vec{x_0}}$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\vec{x} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{P_0 \in E}$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = -5+2+5=0$

$\Leftrightarrow -5x_1 + 1x_2 + 3x_3 = 0$

Beispiel $E: \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\vec{x}=4$

gesucht E in Parameterform

1. Schritt Man wählt die Koordinatenform

$E: 1x_1+2x_2+1x_3=4$

und bestimmt 3 (beliebige) Ebenenpunkte

$P_1(1|1|1)$

$P_2(0|0|4)$

$P_3(4|0|0)$

und damit

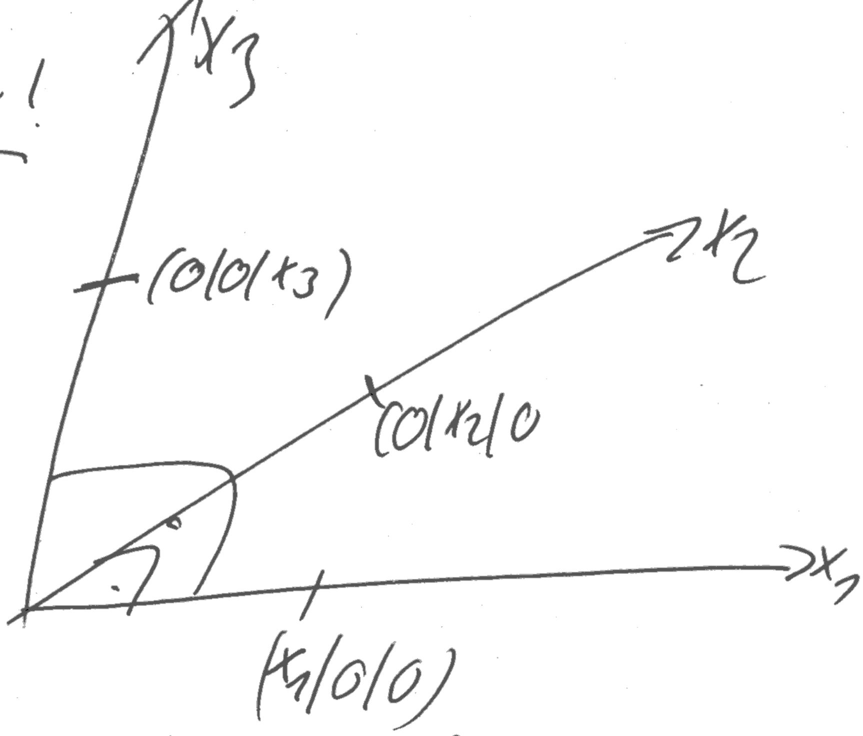
$$E: \vec{x}=\underbrace{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}}_{z.B.}+r\underbrace{(P_2-P_3)}_{z.B.}+s\underbrace{(P_1-P_3)}_{z.B.}$$

$$\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}-4\\0\\4\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-3\\1\\1\end{pmatrix}$$

l.u.!!

Spurpunkte

Der Schnittpunkt zwischen Koordinaten-achse und Ebene nennt man **Spurpunkt!**



Besonders einfach lassen sich Spurpunkte über die Koordinatenform von E bestimmen.

$$E: 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 8$$

x_1: $x_2 = x_3 = 0$ $\quad 2x_1 = 8 \quad x_1 = 4$

$P_1(4|0|0)$

x_2: $x_1 = x_3 = 0$ $\quad 3x_2 = 8$

$x_2 = \frac{8}{3} \quad P_2(0|\frac{8}{3}|0)$

x_3: $x_1 = x_2 = 0$ $\quad 5x_3 = 8$

$x_3 = \frac{8}{5} \quad P_3(0|0|\frac{8}{5})$

Lage von Ebenen zueinander

$E_1 \equiv E_2$ $\qquad$ $E_1 \parallel E_2$ $\qquad$ $E_1 \cap E_2 = \{g_S\}$

Besonders einfach geht alles mit der Normalenform/Koordinatenform der Ebene:

$$\left.\begin{array}{l} E_1 \equiv E_2 \\ E_1 \parallel E_2 \end{array}\right\} \quad n_1 \text{ \underline{muß} zu } n_2 \text{ l.a. sein}$$

$$E_1 \cap E_2 \quad \} \text{ sonst}$$

Beispiel $E_1: \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\vec{x} = 3$

$E_2: \begin{pmatrix}+3\\6\\9\end{pmatrix}\vec{x} = 7$

$\rightarrow$ Die NV'en sind erkennbar l.a.

$$3 \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\6\\9\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow E_1 \overset{\notin}{\equiv} E_2$ oder $E_1 \parallel E_2$

Wir wählen $\underbrace{P_1\,(3|0|0)}_{\text{beliebig}}$ aus E_1

und untersuchen

$$\boxed{P_1 \in E_2 ?}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix}3\\6\\9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix} \overset{?}{=} 7$$

$9 + 0 + 0 = 7$ nein $\Rightarrow P_1 \notin E_2$

$\Longrightarrow E_1 \parallel E_2$

Beispiel $E_1: \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \vec{x} = 4$

$E_2: \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \vec{x} = 3$

$\rightarrow$ Die NV'en sind erkennbar l.u.

$\Rightarrow E_1 \cap E_2 = \{ g_S \}$

Wir lösen

$$\begin{vmatrix} E_1: & 1x_1 + 1x_2 + 1x_3 = 4 \\ E_2: & 2x_1 + 0x_2 - 1x_3 = 3 \end{vmatrix} \quad \text{Sei } \underline{\underline{x_3 = c}}$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1 + x_2 = 4 - c \\ 2x_1 = 3 + c \end{vmatrix} \quad x_1 = 4 - c - x_2$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1 = 4 - c - x_2 \\ 2(4 - c - x_2) = 3 + c \end{vmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad x_1 = 4 - c - x_2$$
$$-2x_2 = 3 + c - 8 + 2c$$

oder $\underline{x_2 = -\frac{3}{2}c + \frac{5}{2}}$

$$x_2 = -\frac{3}{2}c + \frac{5}{2}$$

$$x_1 = 4 - c + \frac{3}{2}c - \frac{5}{2}$$

$$x_1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}c$$

$$\mathbb{L} = \left\{ \vec{x} \text{ mit } \vec{x} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}c \\ \frac{5}{2} - \frac{3}{2}c \\ c \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}}_{g_s} \right\}$$

TIPP Bei Rechnungen/ Schnittunter-suchungen/ Abstandsaufgaben empfiehlt sich immer die Normalenform der Ebene

Ebene $\Leftrightarrow$ Gerade

g liegt in E (a) | g echt parallel zu E (b) | $g \cap E = \{S\}$ (c)

$\boxed{\text{zu (a)}}$ $E: \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \vec{x} = 3$

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Man setzt g in E ein:

~~E~~ $$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3+3r \\ 0+0r \\ 0-3r \end{pmatrix} \stackrel{?}{=} 3$$

$$\Leftrightarrow 3 + 3r + 0 + 0 - 3r \stackrel{?}{=} 3$$

$$\Leftrightarrow 3 = 3$$ immer wahr

$$\underline{\underline{g \subset E}}$$

24 a b)

$$E: \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\vec{x} = 3$$

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}$$

Man setzt g in E:

$$\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix}0-r\\0+r\\2-r\end{pmatrix}}_{g} \overset{?}{=} 3$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\cancel{-r} + \cancel{2r} + 2 - r \overset{?}{=} 3$$

$$2 \overset{?}{=} 3$$ ↯ keine Lösung!

$$\Rightarrow g \parallel E$$

11

zu e

$E: \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \vec{x} = 4$

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$

Man setzt g in E ein

$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2+2t \\ 0-3t \\ 0+0 \end{pmatrix} \stackrel{?}{=} 4$

$\Leftrightarrow 4 + \cancel{4t} + 0 \cancel{-3t} - 3(0+0) = 4$

$\Leftrightarrow t = 0$

genau eine Lösung:

$S: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $S(2|0|0)$ 2 zu c*] Wäre E in Parameterform

so wäre z.B. $E_1 = E_2$:

$$\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} \stackrel{?}{=} \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} + u\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix} + v\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}$$

... ein LGS mit 4 Unbekannten und 3 Gleichungen zu lösen: nein danke

Ausblick

→ Hessesche Normalenform

→ alle Abstandsaufgaben und „Formeln" erklärt an Beispielen

Hessesche

Normalenform

Lotfußpunktverfahren

www. raphael-bier.de

Inhalte 552 + 553 + 554

→ Hessesche Normalenform
Herleitung, Beispiel

→ Normaleneinheitsvektor

→ Abstände: Übersicht

→ Lotfußpunktverfahren

→ Abstandsformel mit der Hesseform

→ Beispiele: Gerade – Gerade – Punkt –
Ebene – Ebene – Gerade

→ Schnittwinkel:

Gerade ∩ Gerade
Gerade ∩ Ebene
Ebene ∩ Ebene

Erklärung und Formel

Beispiele

www.raphael-beine.de

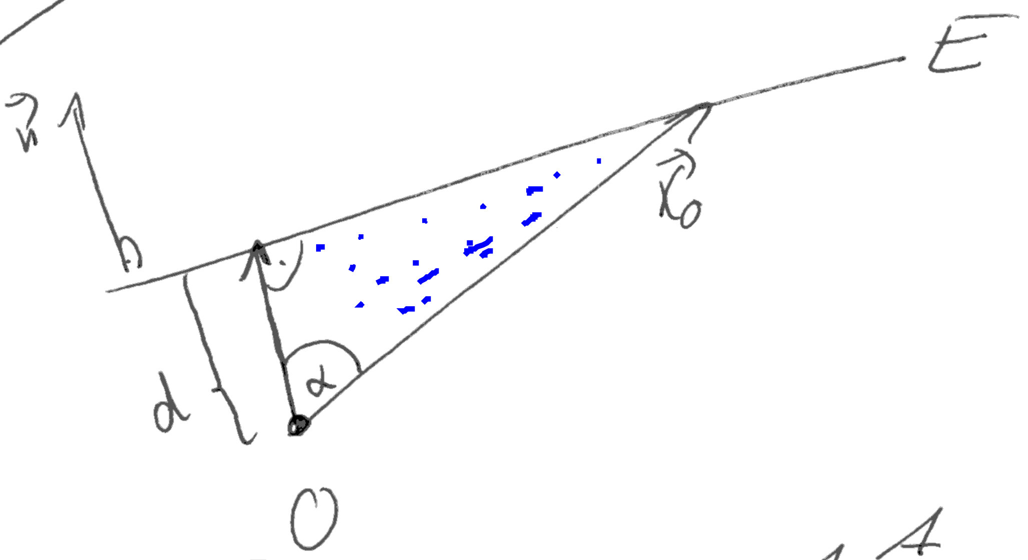
Hessesche Normalenform

Es war E: $\vec{n}(\vec{x}-\vec{x}_0)=0$ oder

$\Leftrightarrow \vec{n}\vec{x}-\vec{n}\vec{x}_0=0$ oder

$\Leftrightarrow \vec{n}x = \underbrace{\vec{n}\vec{x}_0}$

„In dieser Zahl „steckt" der Abstand der Ebene E vom Nullpunkt:



In der Figur gilt: $\cos\alpha \mathrel{\hat=} \frac{A}{H} = \frac{d}{|\vec{x}_0|}$

$\Leftrightarrow d = |\vec{x}_0|\cdot\cos\alpha$

Damit ist

$$\vec{n}\cdot\vec{x}_0 = |\vec{n}|\cdot\underbrace{|\vec{x}_0|\cdot\cos\alpha}_{=d}$$

$$= |\vec{n}|\cdot d \quad \Longrightarrow \quad \boxed{d = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}\cdot x_0} \quad (1)$$

Zusammenfassung

Ist E in Normalenform gegeben

$$E: \vec{n} \cdot \vec{x} = \vec{n} x_0 \quad \Big| \cdot \frac{1}{|\vec{n}|}$$

und multipliziert man mit $\frac{1}{|\vec{n}|}$

$$E_{Hesse}: \underbrace{\boxed{\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}}}_{\vec{n}_0} \cdot \vec{x} = \underbrace{\boxed{\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}}}_{\vec{n}_0} \cdot x_0 \quad \Big\} \quad \vec{n}_0 \cdot \vec{x} = \underline{\vec{n}_0 \vec{x}_0}$$

so gibt die rechts stehende [positive] Zahl den Abstand der Ebene vom Nullpunkt an.

Beispiel

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$E: \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{n}\vec{x} = \vec{n}\vec{x}_0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \vec{x} = 8$$

$$|\vec{n}| = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6}$$

2

$$E: \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \vec{x} = 8 \quad \Big| \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} \qquad \frac{1}{|\vec{n}|}$$

$$\underset{\text{Hesse}}{\Leftrightarrow E}: \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \boxed{\frac{8}{\sqrt{6}}}$$

Abstand der Ebene vom Nullpunkt

Bemerkungen

1

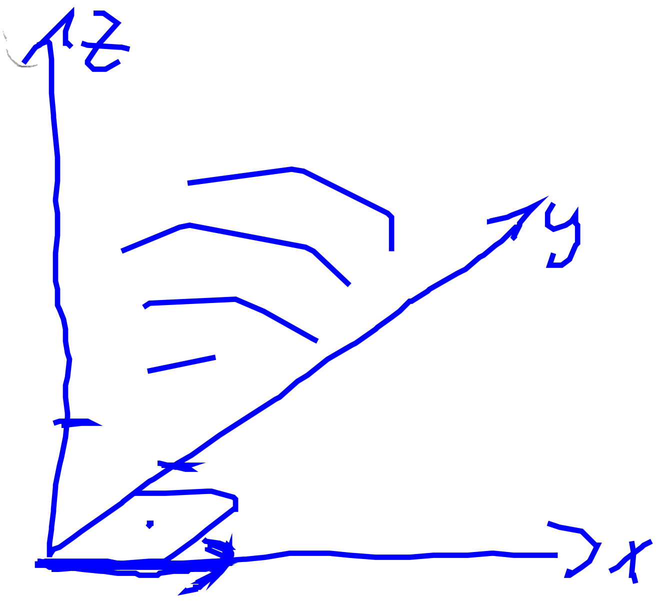
$\vec{n}_0 := \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$ heißt $\underbrace{\text{Normalen}}_{\text{steht senkrecht}}\boxed{\underbrace{\text{einheits}}_{\text{Länge 1}}}\text{vektor}$

Bekannteste Vertreter

$\vec{n}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ steht senkrecht auf y-z Ebene

$\vec{n}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\perp$ auf x,z-Ebene

$\vec{n}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\perp$ auf x-y-Ebene



$\vec{n}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

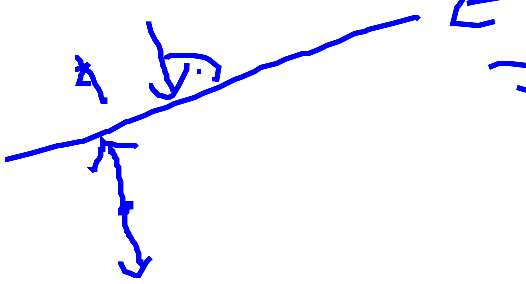
2. Beispiel

$$E: \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}\vec{x} = \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}\overbrace{\begin{pmatrix}1\\1\\-9\end{pmatrix}}^{P_0}$$

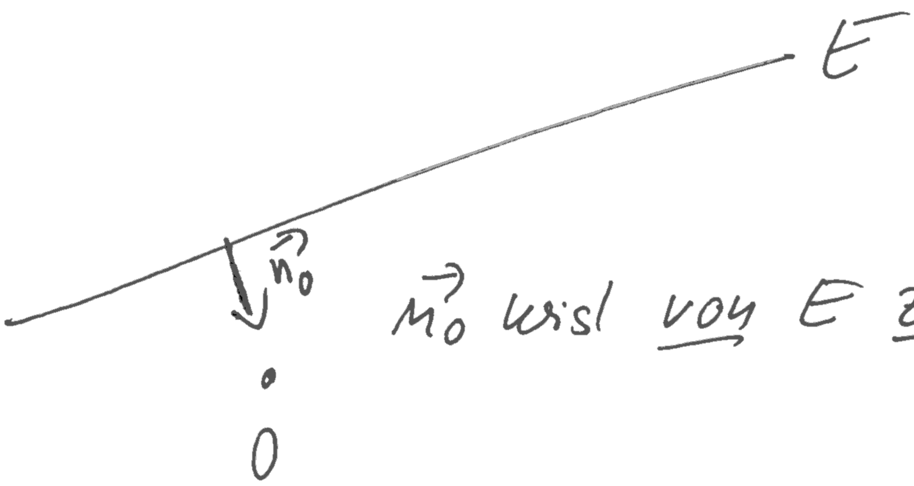
$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}\vec{x} = 2+1-27 = -24 \qquad \Big| \cdot \frac{1}{\sqrt{14}}$$

$$|\vec{n}| = \sqrt{4+1+9} = \sqrt{14}$$

$$E_{Hesse}\quad \frac{1}{\sqrt{14}}\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}\vec{x} = -\frac{24}{\sqrt{14}} \qquad \Big| \cdot(-1)$$



$\Rightarrow d = +\frac{24}{\sqrt{14}}$ und



$\vec{n}_0$ weist von E zu O.

Abstände

$$
\begin{tikzcd}
 & \text{Gerade} \arrow[loop above] \arrow[dd, leftrightarrow] \\
\text{Punkt} \arrow[loop above] \arrow[ur, leftrightarrow] \arrow[dr, leftrightarrow] & \\
 & \text{Ebene} \arrow[loop above]
\end{tikzcd}
$$

1. Punkt ⟺ Punkt ✓
2. Gerade ⟺ Gerade
3. Ebene ⟺ Ebene

---

4. Punkt ⟺ Gerade ✓
5. Punkt ⟺ Ebene ~~✓~~

---

6. Gerade – Ebene

im $\mathbb{R}^2 / \mathbb{R}^3$

Wichtige Verfahren

1. Das Lotfußpunktverfahren
2. Die Variante mit der „Hesseschen Normalenform":

$$\vec{n}_0 (\vec{x}_0 - x) = 0$$

5

Das Lotfußpunktverfahren

Prinzip

① Man fällt das Lot vom Punkt auf die Gerade/Ebene

② Man berechnet den LotFußPkt.

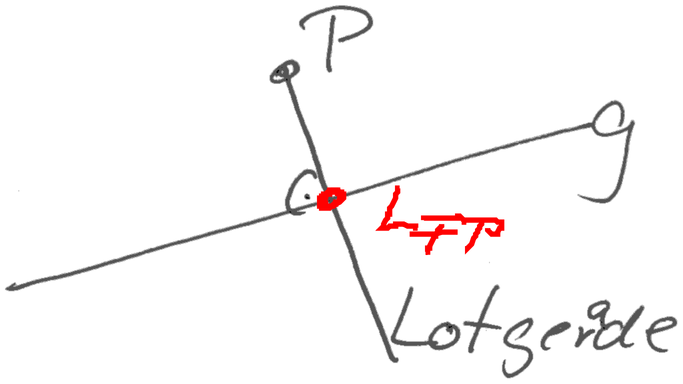
③ Man berechnet den Abstand Punkt → L_{FP}

1. Beispiel (leicht)

Sei: $P(2|3)$ $\quad g: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + t\boxed{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}}$

$$\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix} = -ab + ab = 0$$

zu 1



Lotgerade $g_L: \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} + s\underbrace{\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}}_{\text{senkrecht zum RV von } g}$

L_{FP}

zu 2

$$\boxed{\underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}}_{\text{Gerade}}} \overset{?}{=} \boxed{\underbrace{\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}}_{\text{Lotgerade}}}$$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} 1t + 1s = 1 \\ 1t - 1s = 3 \end{array} \right| \ominus$$

$$\begin{array}{l} t + s = 1 \\ -2s = 2 \\ \hline s = -1 \end{array} \qquad t = 2$$

$$L_{FP}: \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} \;\Big\|\; \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} - 1\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$$

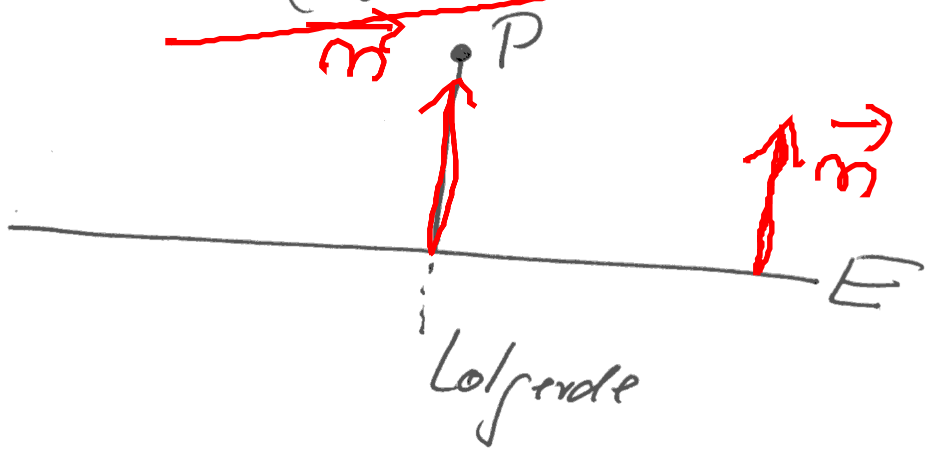
zu 3

$$d = \left| \begin{pmatrix} 2-3 \\ 3-2 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{1+1} = \underline{\underline{\sqrt{2}}}$$

$P \quad L_{FP}$

2. Beispiel (mittel)

$\underline{P(2|0|2)}$ $\quad$ $\underline{E: \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \vec{x} + 1 = 0}$



$\boxed{\text{zu 1}}$

Lotgerade g_L: $\vec{x} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}}} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

P

Normalenvektor von E

$$\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}\vec{x}+1=0 \quad \Big| \quad \vec{x}=\begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}-2\\-1\\2\end{pmatrix}$$

$$=\underline{\begin{pmatrix}2-2r\\0-1r\\2+2r\end{pmatrix}} \quad :S$$

zu2 $g\cap E$:

$$\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}\cdot\underbrace{\boxed{\begin{pmatrix}2+2r\\0-1r\\2+2r\end{pmatrix}}}_{\text{Gerade}}+1\stackrel{?}{=}0$$

$$\Longleftrightarrow \underline{4+4r}\ \underline{+1r}\ +\underline{4+4r}+1=0$$

$$\Longleftrightarrow 9r+5=0$$

$$\underline{\underline{r=-1}}$$

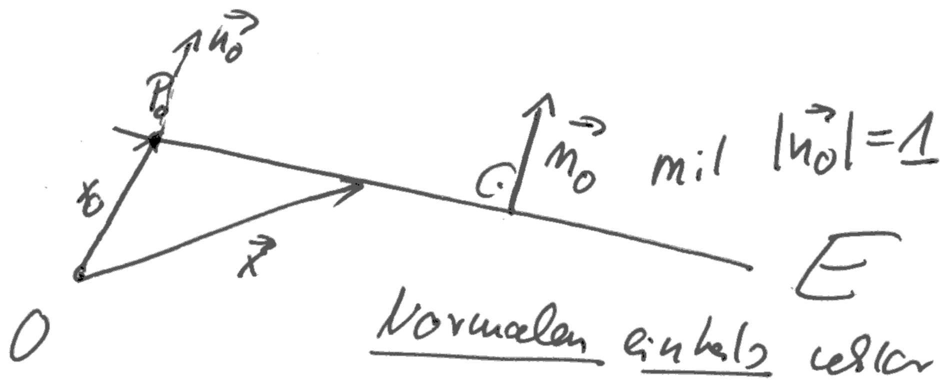
$$L_{FP}:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}-1\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \quad (0|1|0)$$

zu3

$$d=\left|\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}_{L_{FP}}-\begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}_{P}\right|=\left|\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}\right|=\underline{\underline{\sqrt{3}}}$$

5

Die Variante mit der Hesseschen Normalenform



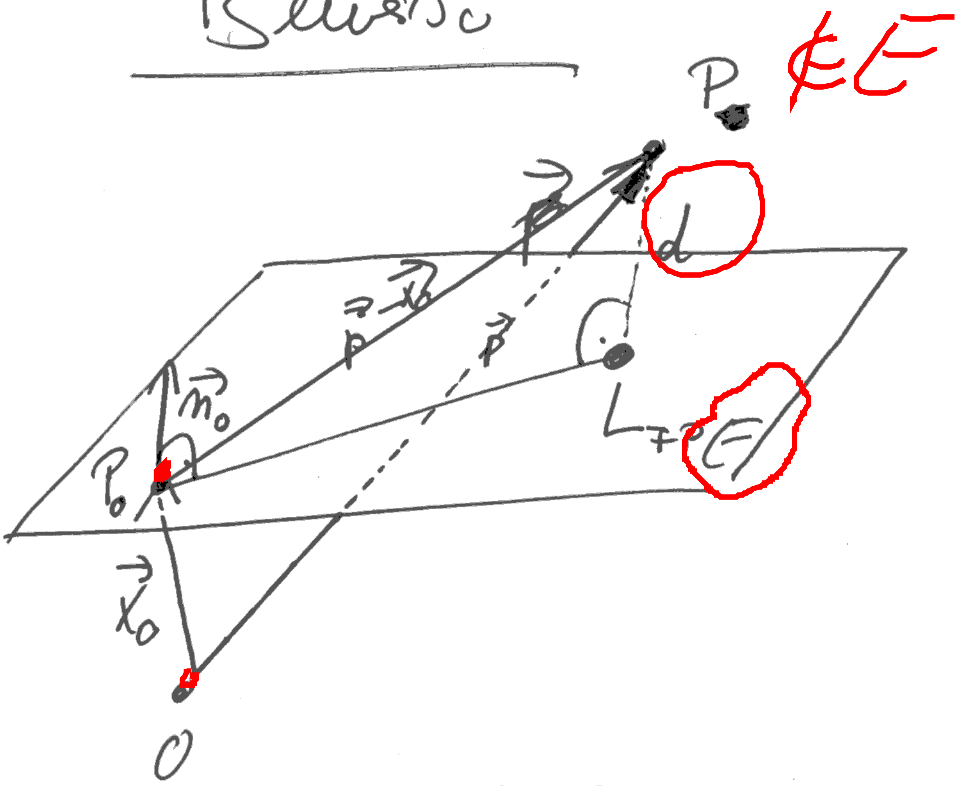
$$\boxed{E:\ \vec{n}_0 \cdot \vec{x} - \vec{n}_0 \cdot \vec{x}_0 = 0} \Leftrightarrow \boxed{\vec{n}_0 \left(\boxed{\vec{x}} - \vec{x}_0\right) = 0}$$

Hesse

Mithilfe dieser HNF lässt sich der Abstand eines Punktes P von der Ebene E berechnen. Es gilt !!!

$$d = \left| \vec{n}_0 \cdot \left(\vec{p} - \vec{x}_0\right) \right|$$

Beweis:



P mit P ∉ E   E: $\vec{n}_0(\vec{x}-\vec{x}_0)=0$

gesucht $d(\overrightarrow{LP})$

$$\boxed{\underbrace{\vec{n}_0\cdot(\vec{p}-\vec{x}_0)}_{\text{Behauptung}}} \underset{\text{Skizze}}{=} \vec{n}_0\cdot\overrightarrow{P_0P}$$

$$= \vec{n}_0\cdot\underbrace{\left[\overrightarrow{P_0L_{FP}}+\overrightarrow{L_{FP}P}\right]}_{\text{siehe Skizze}}$$

$$= \vec{n}_0\cdot\overrightarrow{P_0L} + \vec{n}_0\cdot\overrightarrow{LP}$$

$$= |\vec{n}_0|\cdot|\overrightarrow{P_0L}|\cdot\underbrace{\cos 90^\circ}_{0} + |\vec{n}_0|\cdot|\overrightarrow{LP}|\cdot\cos 0^\circ$$

$$= 0 + 1\cdot|\overrightarrow{LP}|\cdot 1$$

$$= |\overrightarrow{LP}| = d$$

Abstandsaufgaben an Beispielen

(1) Punkt $\Leftrightarrow$ Punkt

$P_1(2|1|1) \quad P_2(-3|1|1)$

$$l(\overline{P_1P_2}) = d(P_1P_2) = |\overrightarrow{P_1P_2}|$$

$$= \left|\begin{array}{c} \begin{pmatrix} -3 - 2 \\ 1 - 1 \\ 1 - 1 \end{pmatrix} \\ P_2 \quad P_1 \end{array}\right|$$

$$= \sqrt{25 + 0^2 + 0^2}$$

$$\underline{\underline{= 5}}$$

② Punkt – Gerade im $\mathbb{R}^2$

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\quad (P(2|2)$

zur Sicherheit $P \notin g$?

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \overset{?}{=} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{matrix} 3r = 1 \\ 4r = 0 \end{matrix} \quad ↯ \quad P \notin g$$

Am schnellsten geht es mit

$$d = \left| \vec{n}_0 (p - \vec{x}_0) \right|$$

$\vec{n} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix} \quad |\vec{n}| = \sqrt{16 + 9} = 5$

$\vec{n}_0 = \begin{pmatrix} -4/5 \\ 3/5 \end{pmatrix}$

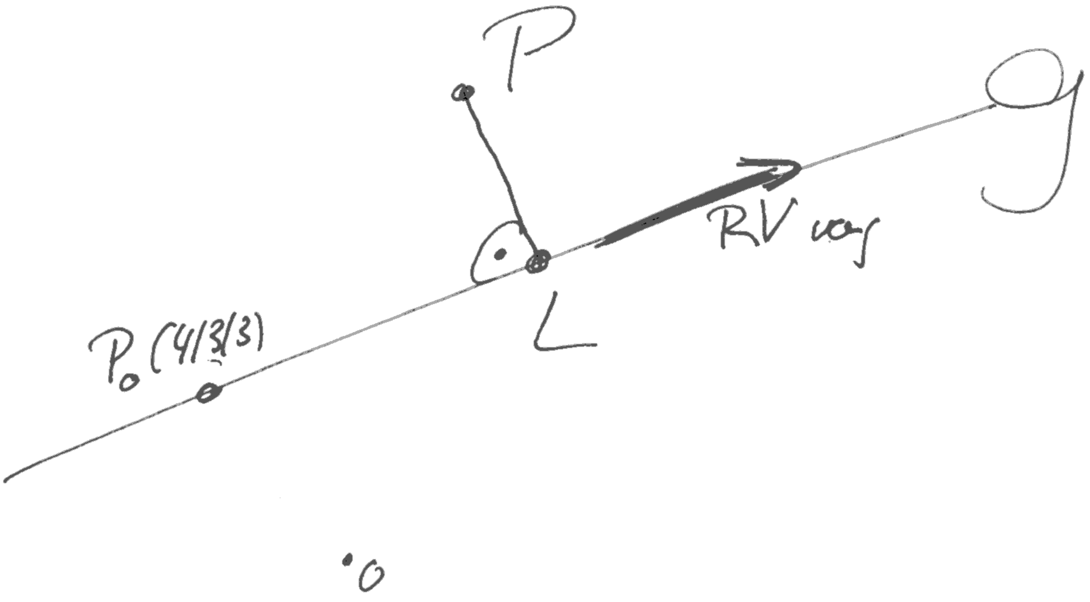
$$d = \Bigg| \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{4}{5} \\ +\frac{3}{5} \end{pmatrix}}_{\vec{n}_0} \cdot \left[\underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}}_{P} - \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{x_0} \right] \Bigg|$$

$$= \left| \begin{pmatrix} -4/5 \\ 3/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{\left(-\frac{4}{5} \cdot 1\right)^2} = \underline{\underline{\frac{4}{5}}}$$

13

③ Punkt – Gerade im $\mathbb{R}^3$

$P\,(2|-3|5)$ $\quad g: \vec{x} = \begin{pmatrix}4\\3\\3\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$



Man bemerkt, daß L auf g liegt, also

$$\vec{x}_L = \begin{pmatrix}4\\3\\3\end{pmatrix} + s_L\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4+2s_L\\3+1s_L\\3-1s_L\end{pmatrix}$$

und daß der RV von g $\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ auf $\overrightarrow{LP}$ senkrecht steht.

also

$$\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix}2-(4+2s)\\-3-(3+1s)\\5-(3-1s)\end{bmatrix}}_{P-L} = 0$$

Daraus wird s $(=s_L)$ berechnet:

$$\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2-2s\\-6-s\\2+s\end{pmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow -4-4s-6-s-2-s=0$$

$$\Leftrightarrow \qquad -6s=12$$

$$s=-2$$

$$\Rightarrow \vec{r}_L=\begin{pmatrix}4+2s_L\\3+1s_L\\3-1s_L\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\5\end{pmatrix}$$

$L=(0|1|5)$ $\quad P(2|-3|5)$

$$d(\overline{LP})=|\vec{LP}|=\left|\begin{pmatrix}2\\-3\\5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\1\\5\end{pmatrix}\right|$$

$$=\left|\begin{pmatrix}2\\-4\\1\end{pmatrix}\right|=\sqrt{4+16+\text{[redacted]}}$$

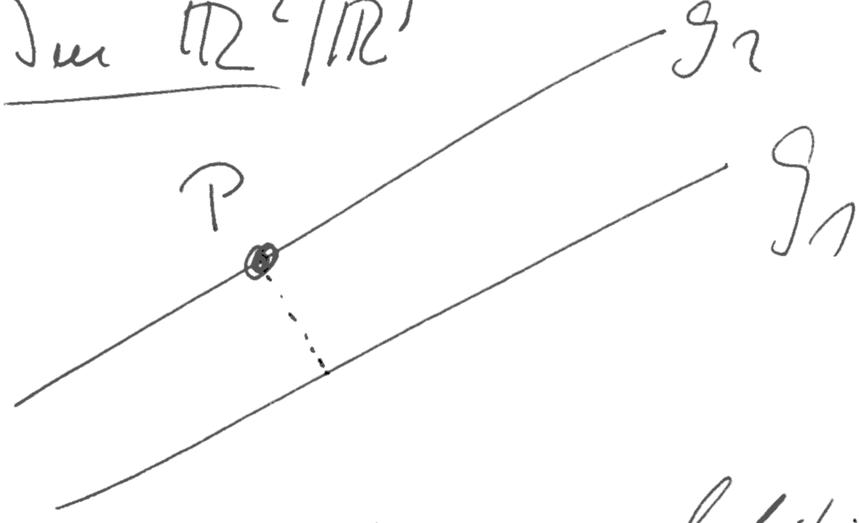
$$=\underline{\underline{\sqrt{2\text{[redacted]}}}}$$

15

(4) Gerade – Gerade

Die 2 Geraden müssen natürlich echt parallel zueinander sein.

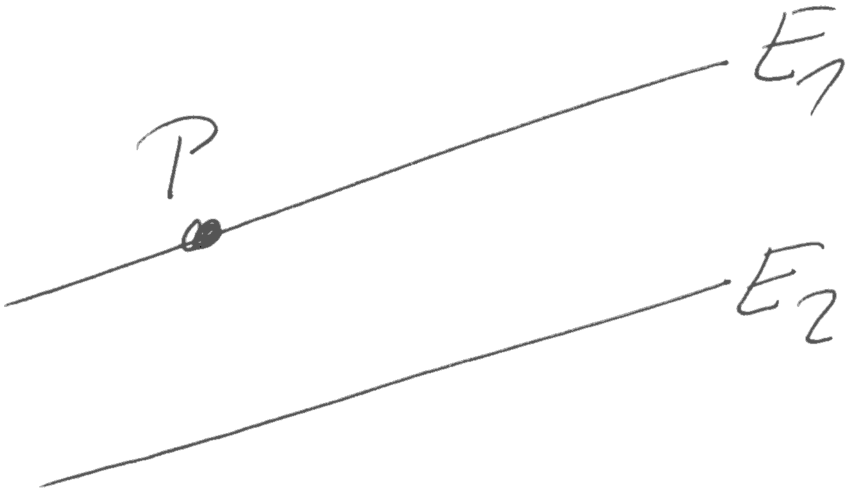
Im $\mathbb{R}^2/\mathbb{R}^3$



Man wählt einen beliebigen, aber konkreten Punkt aus g_2 und verfährt dann wie „Punkt – Gerade"

⑤ Ebene – Ebene

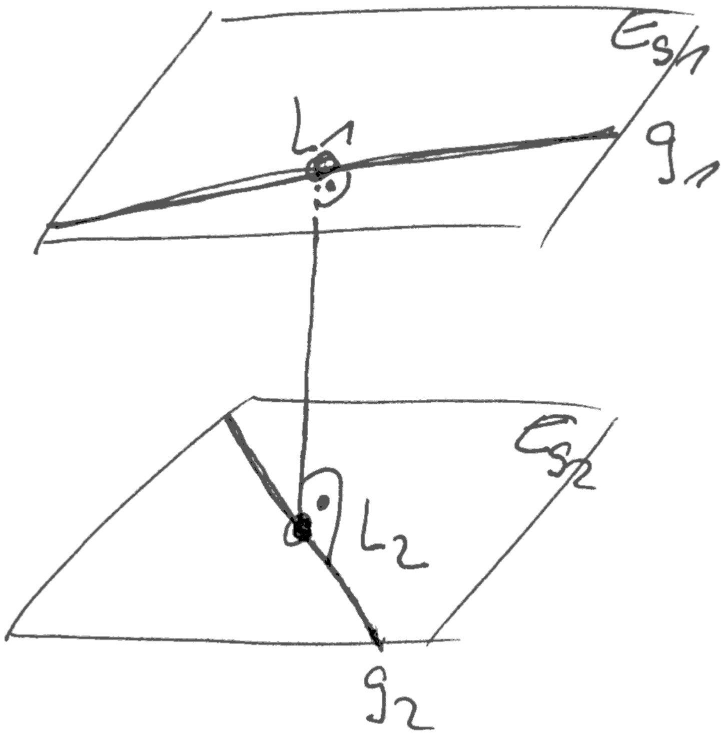
Die 2 Ebenen müssen natürlich echt parallel zueinander sein;



Man wählt $P \in E_1$ und verfährt dann wie „Punkt → Ebene“

(6) Abstand windschiefer Geraden

→ Zu 2 windschiefen Geraden [im Raum] gibt es auf jeder Geraden genau einen Punkt derart, daß die Verbindungslinie dieser 2 Punkte senkrecht zu beiden Geraden ist



$g_1 \nparallel g_2$

(1.) $\overrightarrow{L_1L_2}$ steht senkrecht auf g_1/g_2

(2) Die „Hilfsebenen" E_{g_1} und E_{g_2} enthalten jeweils g_1 und g_2 und sind parallel zueinander, haben also einen gemeinsamen Normalenvektor $\vec{n}_0$

Beispiel

$g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}$

$g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

1. Schritt: Mithilfe der Richtungsvektoren $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ berechnet man $\vec{n_0}$ der 2 Hilfsebenen E_{g_1} und E_{g_2}:

$$\left| \begin{aligned} 4n_1 + 1n_2 - 6n_3 &= 0 \\ 0n_1 - 1n_2 + 3n_3 &= 0 \end{aligned} \right| \quad \text{sei } \underline{n_3 = 4}$$

$$\left| \begin{aligned} 4n_1 + n_2 &= 24 \\ \underline{\underline{n_2 = 12}} \end{aligned} \right|$$

$\Rightarrow 4n_1 = 24 - 12 = 12$

$\underline{\underline{n_1 = 3}}$

$\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ 4 \end{pmatrix} \quad |\vec{n}| = \sqrt{9 + 144 + 16}$

$= \sqrt{169}$

$= 13$

$\vec{n_0} = \begin{pmatrix} 3/13 \\ 12/13 \\ \ldots \end{pmatrix}$

2. Schritt: Wählt man nun aus g_1 ($g_1 \subset E_{g_1}$) z.B. den Punkt $(6|1|-4)$ und berechnet den Abstand $(6|1|-4) \longrightarrow E_{g_2}$, so ergibt sich

$$\left| \vec{n}_0 \left[\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right] \right|$$

Punkt aus E_{g_2} (mit g_2)

$$= \left| \begin{pmatrix} \frac{3}{13} \\ \frac{12}{13} \\ \frac{4}{13} \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix} \right] \right|$$

$$= \left| \frac{6}{13} + \frac{12}{13} - \frac{28}{13} \right| = \underline{\underline{\frac{10}{13}}}$$

Das obige Beispiel lässt sich ohne Weiteres verallgemeinern.

Abstand zweier windschiefer Geraden

$g_1: \vec{x} = \vec{x_1} + a \cdot \vec{u}$

$g_2: \vec{x} = \vec{x_2} + b \cdot \vec{v}$

$$d = \left| \underbrace{\frac{\vec{u} \times \vec{v}}{|\vec{u} \times \vec{v}|}}_{\vec{n_0}} \cdot (\vec{x_1} - x_2) \right|$$

Ausblick: „Alle Schnittwinkelfälle" an konkreten Beispielen

www.raphael-binv.de

Inhalte 552+553+554

→ Hessesche Normalenform
Herleitung, Beispiel

→ Normaleneinheitsvektor

→ Abstände: Übersicht

→ Lotfußpunktverfahren

→ Abstandsformel mit der Hesseform

→ Beispiele: Gerade – Gerade – Punkt –
Ebene – Ebene – Gerade

→ Schnittwinkel:

Gerade ∩ Gerade
Gerade ∩ Ebene
Ebene ∩ Ebene

} Erklärung und Formel

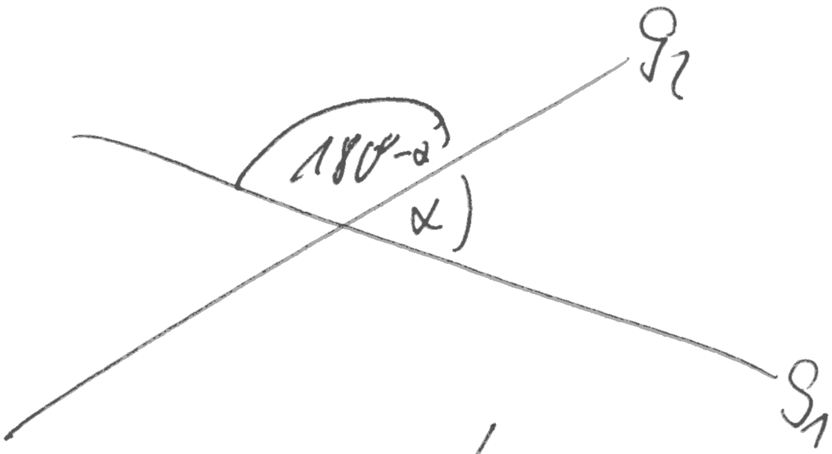
Beispiele

www.raphael-heine.de

Schnittwinkel (554)

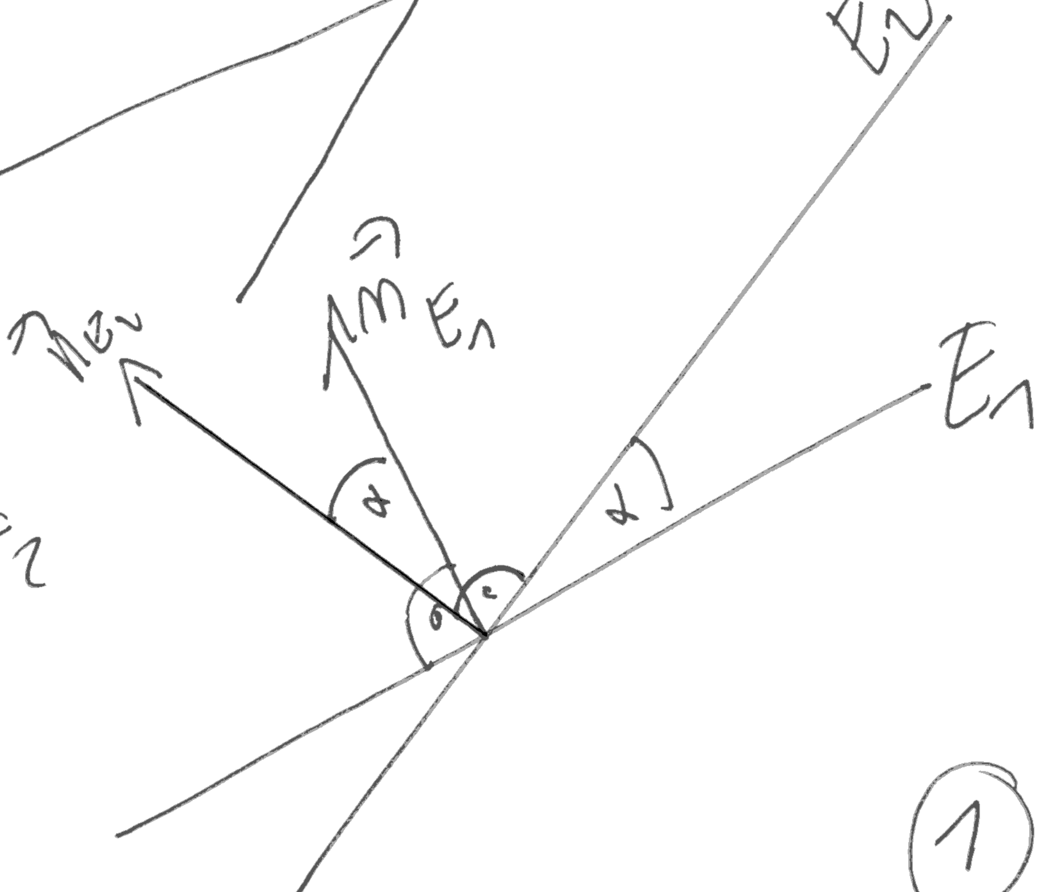
3 Fälle:

(1) $g_1 \cap g_2$



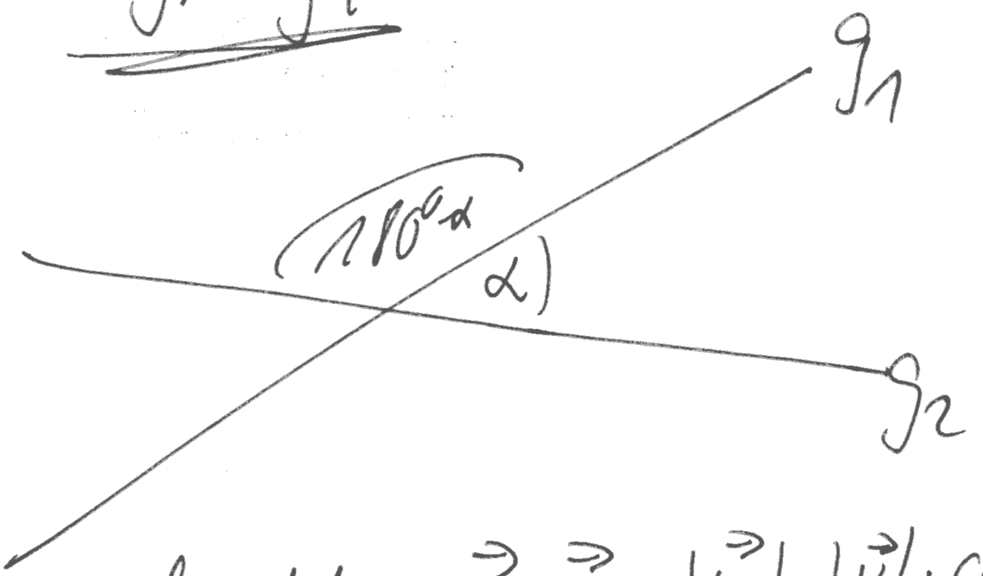
(2) $g \cap E$

(3) $E_1 \cap E_2$



(1)

Zu 1 $\quad g_1 \cap g_2$



Man berechnet $\quad \vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\alpha$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\cos\alpha = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}$$

und wählt – falls das Ergebnis über 90° liegt – den „kleineren" Nebenwinkel.

1. Beispiel

$$g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Falls nichts gesagt wird, muss überprüft werden, ob $g_1 \cap g_2 = \{S\}$ existiert.

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \overset{?}{=} \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\left|\begin{aligned} 1r + 2t &= 3 \\ 3r - t &= 2 \\ 2r - t &= 1 \end{aligned}\right| \quad \cdot 3 \ominus \qquad \cdot 2 \ominus$$

$$\left|\begin{aligned} 1r + 2t &= 3 \\ 0r - 7t &= -7 \\ 0r - 5t &= -5 \end{aligned}\right| \quad \begin{aligned} r &= 1 \\ t &= 1 \\ t &= 1 \Rightarrow S(3|4|1) \end{aligned}$$

$$\cos\alpha = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{14}\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{21}}{14} \approx 0{,}33$$

$$\underline{\underline{\alpha \approx 70{,}9^\circ}}$$

3

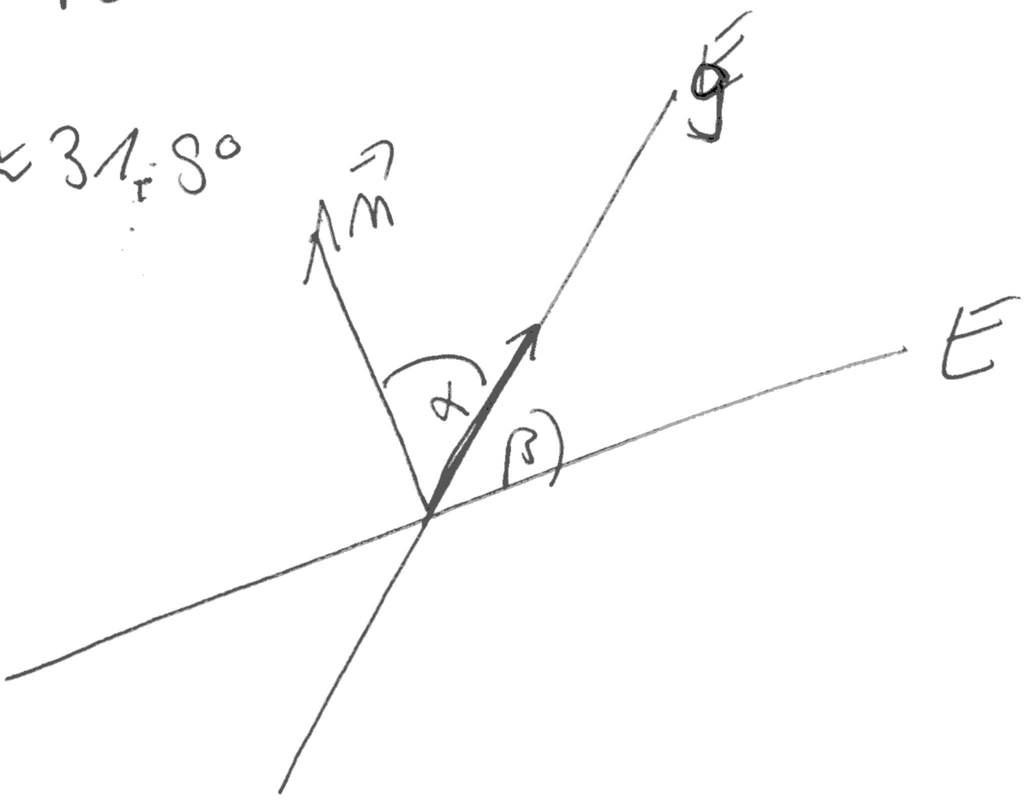
2. Fall $g \cap E$

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$E: \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \vec{x} = 24$$

$$\cos\alpha = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}}{\sqrt{6}\,\sqrt{75}} = \frac{18}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{75}} \approx 0{,}849$$

$\alpha \approx 31{,}9°$



also $\beta = 90° - \alpha = \underline{58{,}1°}$

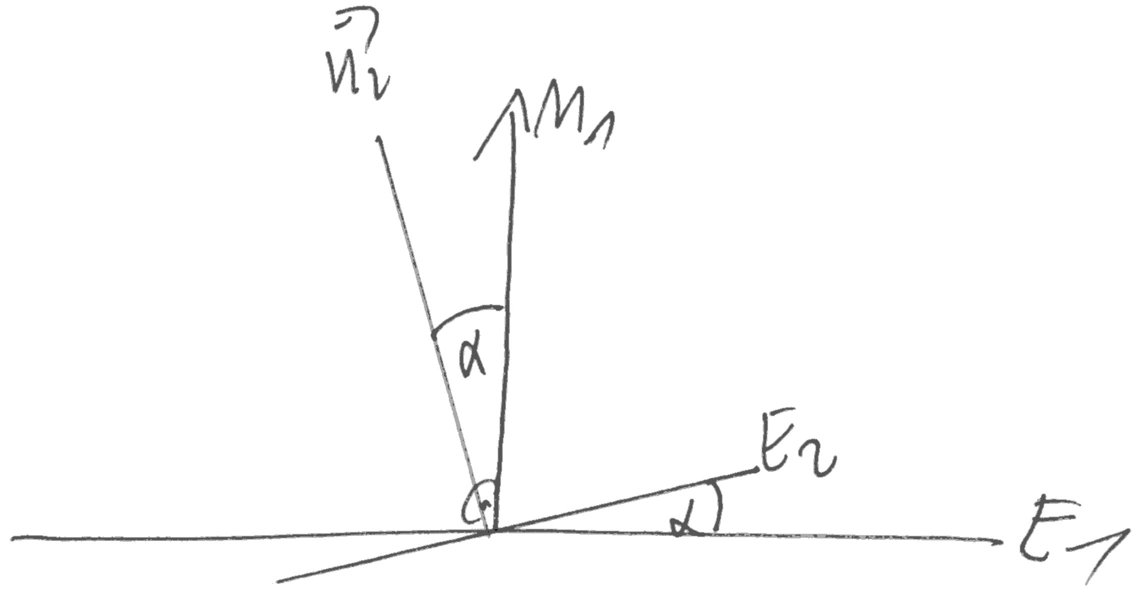
4

3. Fall) $E_1 \cap E_2$

$$E_1: \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \vec{x} = 12 \qquad E_2: \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \vec{x} - 7 = 0$$

$$\cos\alpha = \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ (-1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{6}\,\sqrt{11}} = \frac{6}{\sqrt{66}} \approx 0{,}739$$

$$\alpha \approx 42{,}4^\circ$$



Weiterführende Aufgaben

unter „Playlists" auf

meinem Kanal

Mathematikaufgaben

alle Unterlagen als pdf unter

www.raphael-biere.de

6