Höhere Mathematik für Nebenfächler ...

Video 24

Raumkurven und begleitendes Dreibein

Wünsche? Anregungen?
Mail an mich!
Posting!

Inhalt

- Raumkurven
  Beispiele

- Begleiter des Dreibeins:
  - Tangenten(einheits)vektor
  - Hauptnormalen(einheits)vektor
  - Binormalen(einheits)vektor

- Ausblick:
  Frenetschen Gleichungen, Krümmung, Torsion

Raumkurven

1. Beispiel $\vec{f}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t \\ t^2 \end{pmatrix}$ ~~$-3 \leq t \leq 3$~~

2. Beispiel $\vec{f}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t \end{pmatrix}$ $0 \leq t \leq 2\pi$

allgemein

$$\vec{f}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

[$r(t)$
$\vec{x}(t)$ ...]

$$\dot{\vec{f}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ „regulär"

Tangentenvektor

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t \end{pmatrix}$$

$$\dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 1 \end{pmatrix}$$

Mit dem Tangentenvektor $\vec{t}(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 1 \end{pmatrix}$ läßt sich z.B. die Tangente an der Stelle $t_0 = \frac{\pi}{2}$ an die Raumkurve $\vec{r}(t)$ legen:

$$\vec{t}(t_0) = \vec{t}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} -\sin \frac{\pi}{2} \\ \cos \frac{\pi}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}(t_0) = \vec{r}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{2} \\ \sin \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \pi/2 \end{pmatrix}$$

Also

Tangente: $\vec{x} = P_0 + r \cdot \vec{t}$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\pi}{2} \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

<u>Bemerkung</u>

Bringt man den Tangentenvektor „auf die Länge 1", normiert man ihn, so erhält man

$$\left| \vec{t(t)} \right| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1^2} = \sqrt{2}$$

also ist

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 1 \end{pmatrix}$$

der <u>Tangenteneinheitsvektor</u>.

Begleitendes Dreibein einer Raumkurve

Beispiel

Ziel Ein – von einem Kurvenpunkt P – abhängiges „Koordinatensystem" mit 3 jeweils ~~senkr~~ senkrecht aufeinanderstehenden Vektoren. [ideal: alle 3 Vektoren haben „Länge 1" wie

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

1. Vektor der Tangentenvektor $\vec{t}$

$$\vec{f(t)} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

$$\cancel{\vec{t}(t)} = \dot{\vec{f}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix}$$

Beispiel $\vec{f(t)} = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t \end{pmatrix}$ $0 \le t \le 2\pi$

$$\cancel{\vec{t}(t)} \; \dot{\vec{f}}(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$|\dot{\vec{f}}(t)| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 + 1}$$
$$= \sqrt{2}$$

$$\vec{t}(t) = \frac{\dot{\vec{f}}(t)}{|\dot{f}(t)|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. Vektor

Als 2. Vektor wählt man

$\ddot{\vec{f}}(t)$ und normiert ihn ssf.

Beispiel

$$\vec{f}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t \end{pmatrix}$$

$$\dot{\vec{f}}(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\ddot{\vec{f}}(t) = \begin{pmatrix} -\cos t \\ -\sin t \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit $|\ddot{\vec{f}}(t)| = \sqrt{\cos^2 + \sin^2 + 0^2} = 1$

Der normierte Vektor $\frac{\ddot{\vec{f}}(t)}{|\ddot{\vec{f}}(t)|}$ heißt

$\vec{N}(t)$ Hauptnormaleneinheitsvektor

Dritter Vektor

Mithilfe des Kreuzproduktes erhält man einen 3 Vektor, der – da $\vec{t}(t)$ und $\vec{N}(t)$ normiert sind – ebenfalls normiert ist und $\vec{t}(t), \vec{N}(t), \vec{t} \times \vec{N}$ bilden ein Rechtssystem: das begleitende Dreibein der Raumkurve $\vec{f}(t)$

Beispiel

$$\vec{f}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t \end{pmatrix} \quad 0 \leq t < 2\pi$$

$$\vec{t}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{N}(t) = \begin{pmatrix} -\cos t \\ -\sin t \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{t} \times \vec{N} = \begin{pmatrix} \frac{-\sin t}{\sqrt{2}} \\ \frac{\cos t}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\cos t \\ -\sin t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} + \frac{\sin t}{\sqrt{2}} \\ - \frac{\cos t}{\sqrt{2}} \\ + \frac{\sin^2}{\sqrt{2}} + \frac{\cos^2}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

also

$$\vec{t} \times \vec{N} = \begin{pmatrix} -\frac{\sin t}{\sqrt{2}} \\ -\frac{\cos t}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} +\sin t \\ -\cos t \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\frac{\vec{t} \times \vec{N}}{|\vec{t} \times \vec{N}|}}_{\substack{\text{schon „1"} \\ \text{falls} \\ |\vec{t}|=|\vec{N}|=1}}$$

wird oftmals auch als Binormalen(einheits)vektor b bezeichnet.

Ausblick

(1) Stellt man die Ableitungen dieser drei Vektoren, also $\vec{t}'$, $\vec{n}'$, $\vec{b}'$, als <u>Linearkombination</u> der Vektoren $\vec{t}$, $\vec{N}$, $\vec{b}$ dar, so erhält man die sog.

<u>Frenetschen Gleichungen</u>

aus denen man dann die „Krümmung" und „Torsion" der Raumkurve bestimmen kann.

Alle Unterlagen als kostenlose pdf Datei auf

www.raphael-bürr.de