Gruppen Ringe
Körper:

Algebraische Strukturen anhand
von Beispielen

Höhe Mathematik für Studienanfg,
Nebenfächler usw

Video

www.raphael-brire.de

„Strukturen" aus der Schulzeit

→ Das Kommutativgesetz

$$2+3=3+2$$

aber

$$5-4 \neq 4-5$$

oder

$$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}=\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}$$

aber

$$\pi : \sqrt{3} \neq \sqrt{3} : \pi$$

→ Das Distributivgesetz

$$2\cdot(3+4)=2\cdot 3+2\cdot 4$$

oder

$$4\cdot(8-9)=4\cdot 8-4\cdot 9$$

aber

$$2-(3\cdot 5)\neq 2-3\cdot 2-5$$

→ Der Vektorraum

$$\left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \middle| \; a_i \in \mathbb{R} \right\} \text{ mit}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$$

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \\ \lambda a_2 \end{pmatrix}$$

... und ganz vielen Gesetzen.....

Verknüpfung

Eine „Verknüpfung" kann definiert werden als Abbildung

$$\circ : \begin{array}{l} M \times M \longrightarrow M \\ (a,b) \longrightarrow a \circ b \end{array}$$

Reihenfolge!!

Abgeschlossenheit $a \circ b$ liegt wieder in M, ist also Element von M

Assoziativität „Klammern egal"

$$a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$$

Neutrales Element „e" „Das Element, das nix bewirkt"

$$a \circ e = a \text{ bzw } e \circ a = a$$

Inverses Element „a^{-1}" $a \circ a^{-1} = e$ bzw $a^{-1} \circ a = e$

<u>Kommutativität</u> $a \circ b = b \circ a$

<u>Schreibweisen</u> / Sprechweisen

→ $\circ$ oder $\times$ oder $\otimes$ o.ä. ....

<u>Beispiele</u>

→ $(\mathbb{N},+)$ mit $\mathbb{N} = \{1,2,3,4,..\}$

<u>Abgeschlossen</u> ja : $a+b \in \mathbb{N}$

<u>Assoziativ</u> ja : $a+(b+c)=(a+b)+c$

<u>Neutral</u> nein: $a+? = a$

<u>Inverses</u> nein, weil „e" fehlt

<u>Kommutativ</u> ja $a+b=b+a$

$\rightarrow (\mathbb{N}^0, +)$ mit $\mathbb{N}^0 = \{0; 1; 2, \dots\}$

Offenbar ist „e" hinzugekommen:

$$a + 0 = a$$
$$0 + a = a$$

$\rightarrow (\mathbb{Z}, +)$ mit $\mathbb{Z} = \{\dots -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$

Abgeschlossen: ja ✓ $a + b \in \mathbb{Z}$

Assoziativ: ja ✓ $a + (b+c) = (a+b) + c$

neutrales Element: ja ✓ $e = 0$

inverses Element: ja $-a$ zu $a \in \mathbb{Z}$

mit

$$a + (-a) = 0$$
$$-a + a = 0$$

kommutativ: ja ✓ $a + b = b + a$

$!! \; ((-4) + (-3) \overset{!!}{=} (-3) + (-4))$

Gruppen, Halbgruppen, abelsche Gruppen

Hat man eine Menge von Elemente sowie eine Verknüpfung, dann heißt $(G, \circ)$ GRUPPE, falls folgende Eigenschaften gelten

① Abgeschlossenheit Mit $a, b \in G$ ist $a \circ b$ wieder aus G

② Assoziativität $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$

③ Neutrales Element Es gibt ein $e \in G$ mit $a \circ e = a \quad e \circ a = a$

④ Inverses Element Zu jedem $a \in G$ gibt es ein „a^{-1}" $\in G$ mit $a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e$

Zusatz Gilt $a \circ b = b \circ a$ so spricht man von einer abelschen Gruppe [Abel,

Beispiele

① $(\mathbb{Z}, +)$ „e" = 0
und „a^{-1}" = $-a$

Abelsche Gruppe

② $(\mathbb{N}, -)$ <u>kein</u> Gruppe, nicht abgeschlossen
$3-4 \notin \mathbb{N}$

③ $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ $\Rightarrow a \cdot b \in \mathbb{Q}$ ✓
$\Rightarrow a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ ✓
$\Rightarrow a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$
$\Rightarrow$ also „e" = 1

$\Rightarrow a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1$

deswegen muß man auch „0" herausnehmen

Bemerkungen

⇒ Eine „Gruppe“, bei der die Gruppenaxiome nicht zu gelten brauchen, heißt „Gruppoid.“

⇒ Ein Gruppoid, in dem noch das Assoziativgesetz gilt, heißt Halbgruppe.

⇒ Existiert in einer Halbgruppe ein neutrales Element, so spricht man von einem Monoid.

Beispiele

→ $(\mathbb{N}_0,+)$ ist Monoid

→ $(\mathbb{N},\cdot)$ ist Monoid

→ $(\mathbb{N},:)$ ist kein Monoid, weil das Assoz.gesetz $(a:b):c=a:(b:c)$ nicht gilt.

→ Eine Teilmenge einer Gruppe, die selbst Gruppe ist, heißt

<u>Untergruppe</u>

<u>Beispiel</u> $(\mathbb{R}^{\setminus\{0\}}, \cdot)$ ist Gruppe

$(\mathbb{Q}^{\setminus\{0\}}, \cdot)$ ist Untergruppe

Ringe

Kommt eine „zweite" Verknüpfung hinzu und gelten folgende ~~Axi~~ Gesetze:

→ $(R,+)$ ist abelsche Gruppe

→ $(R,\cdot)$ ist Halbgruppe

→ $a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c$

$(a+b)\cdot c = a\cdot c + b\cdot c$

so nennt man $(R,+,\cdot)$ <u>Ring</u>

<u>Sprechweise</u>

→ Das neutrale Element von $(R,+)$ heißt <u>Nullelement von R</u>.

→ Falls „$\cdot$" kommutativ ist, spricht man von einem <u>kommutativen Ring</u>

Bemerkungen

Die Notation ist manchmal verwirrend:

→ Das neutrale Element bezgl. • muß nicht unbedingt dazugehören.
Gehört es dazu, spricht man auch von einem <u>unitären Ring</u>.

→ Ringe, die das Assoziativgesetz bezgl. • <u>nicht</u> erfüllen, heißen <u>nicht assoziative Ringe</u>.

BEISPIELE

① $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ist Ring

② $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ ist Ring

③ $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ist Ring

④ $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ ist kein Ring:

z.B ist $(\mathbb{N}, +)$ mit $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$
kein Gruppe: $e = 0 \notin \mathbb{N}$!

⑤ $\mathbb{R}[x] := \{ a_0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + ... + a_n x^n \mid a_i \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}_0 \}$

„Polynomring über $\mathbb{R}$ in der Variablen x mit der „üblichen" Addition/Multiplikation)

⑥ $\mathbb{Z}_{\sqrt{2}} := \{ a + b \cdot \sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z} \}$
mit der „üblichen" Addition/Multiplikation ist Ring.

⑦ $M_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \; a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$

mit der „üblichen" Matrizenaddition bzw Matrizenmultiplikation ist ein Ring. Dabei ist:

$$"0" = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$"1" = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und die <u>Matrizenmultiplikation</u> ist <u>nicht</u> kommutativ!!

Körper

Eine Menge K mit 2 Verknüpfungen „+", „·" heißt **Körper**, falls

(K_1) $(K, +)$ abelsche Gruppe mit „0"

(K_2) $(K \setminus \{0\}, \cdot)$ ist abelsche Gruppe mit „1".

(K_D) Es gilt das Distributivgesetz

$$a \cdot (b + c) = ab + ac$$

$$(a + b) \cdot c = ac + bc$$

Beispiel

→ $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ist der „Körper der reellen Zahlen

Bemerkungen

→ Zwischen „Ring" und „Körper" gibt es – auch je nach Definition! – eine Vielzahl von „Beziehungen".

→ Neben „Ringen", „unitären Ringen" usw gibt es auch „Schiefkörper", „Alternativkörper", „Quasikörper" usw s. WIKIPEDIA

Weitere Beispiele

→ Der Körper der rationalen Zahlen $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$

→ Körper der komplexen Zahlen $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ – siehe auch mein Video über komplexe Zahlen:

„Höhere Mathematik für Studienanfänger Video 6"