Höhere Mathematik für Studienanfänger, Nebenfächler…

Video 26

Homomorphismus, Isomorphismus und Co…

Inhaltsverzeichnis

→ Homomorphismus: was ist das?

→ Beispiele

→ wichtige Eigenschaften

→ injektiv, surjektiv, bijektiv

→ Beispiele

→ Endomorphismus, Homomorphismus, Isomorphismus, Automorphismus,

→ einfache Beispiele

Homomorphismus

„Verknüpft" man zwei Gruppen $(G, \bullet)$ und $(H, \circ)$ so miteinander:

$$f: \begin{array}{l} (G,\bullet) \longrightarrow (H,\circ) \\ f(x\bullet y) \longrightarrow f(x)\circ f(y) \end{array}$$

so nennt man die Abbildung f einen (Gruppen)homomorphismus.

[ὁμός ≙ gleich, ähnlich
μορφή ≙ Form]

Umgangssprachlich

... ist es also „egal", ob man zuerst 2 Elemente verknüpft $(x\bullet y)$ und sie dann der Abbildung unterwirft $f(x\bullet y)$, oder ob man sie zuerst „abbildet", $x \to f(x)$, $y \to f(y)$ und sie dann verknüpft $f(x)\circ f(y)$

Beispiele

① $(\mathbb{R},+) \longrightarrow (\mathbb{R},\cdot)$

$\exp: \quad x \longrightarrow \exp(x)$

$$\exp(a+b) \overset{?}{=} \exp(a) \cdot \exp(b)$$

$$\begin{aligned}\exp(a+b) &= e(a+b) \\ &= e^{a+b} \\ &= \underline{\underline{e^{a} \cdot e^{b}}}\end{aligned}$$

$$\exp(a) \cdot \exp(b) = \underline{\underline{e^{a} \cdot e^{b}}}$$

1 $(\mathbb{R}, \cdot) \longrightarrow (\mathbb{R}, \cdot)$

$f: \quad x \mapsto \frac{1}{x} \qquad x \neq 0$

$$f(a \cdot b) \stackrel{?}{=} f(a) \cdot f(b)$$

$$f(a \cdot b) = \frac{1}{a \cdot b} = \underline{\underline{\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b}}} \qquad a, b \neq 0$$

$$f(a) \cdot f(b) = \underline{\underline{\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b}}}$$

5

Unmittelbare Folgerungen

(1) Homomorphismen bilden „das neutrale Element" auf das „neutrale Element" und das „inverse" auf das „inverse" ab

$$f: (G,\bullet) \longrightarrow (H,\circ)$$

(i) $e_G \longrightarrow f(e_G) = e_H$

(ii) $a^{-1} \longrightarrow f(a^{-1}) = \overline{f(a)}^{\,1}$

$\boxed{\text{Beweis z.B. für (i)}}$

$$f(e_G) = e_H$$

$f(e_G) = f(e_G \bullet e_G)$ [weil $e_G \bullet e_G = e_G$]

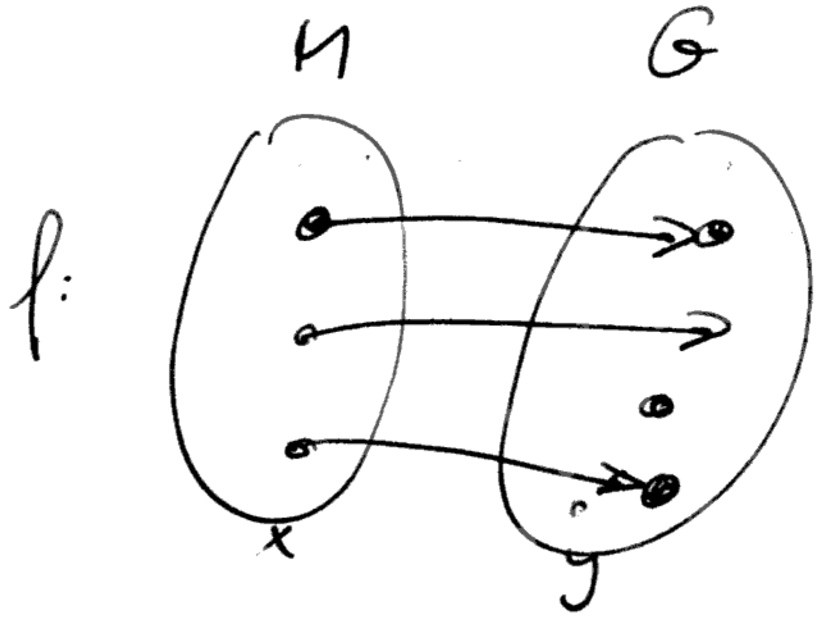
$= f(e_G) \circ f(e_G)$ [weil f Homom.]

$= e_H$ [es kann in H nur $\underline{1}$ Element mit dieser Eigenschaft geben]

Weiterführende Betrachtungen

Vorbemerkung
→ injektiv
→ surjektiv
→ bijektiv

$\boxed{\text{injektiv}}$

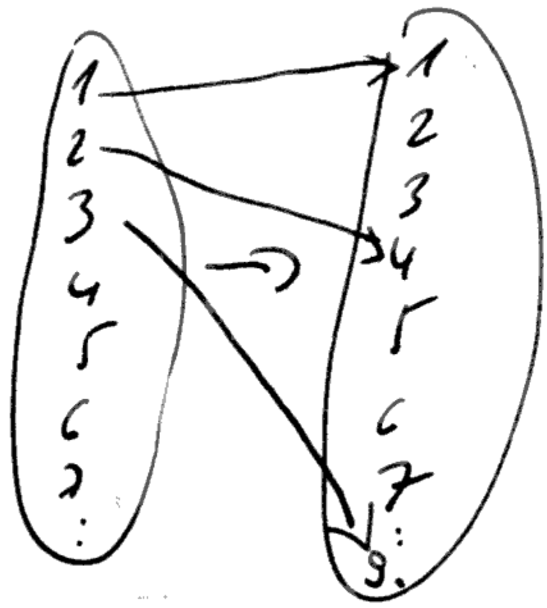


Jedes „Bild(element)" aus G hat höchstens ein Urbild(element) aus M.

(+)

Beispiel

$$f: \begin{array}{l} \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \\ n \mapsto n^2 \end{array}$$



injektiv

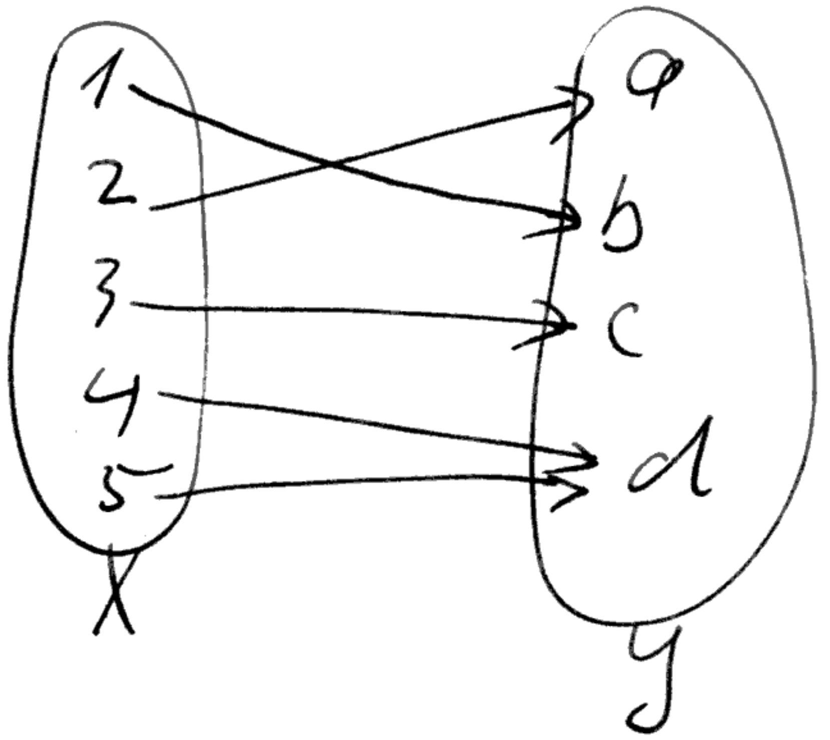
Gegenbeispiel

$$f: \begin{array}{l} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \\ z \mapsto z^2 \end{array}$$

<u>nicht</u> injektiv, weil z.B

$$f(+1) = 1$$
$$f(-1) = 1$$

Surjektiv



Jedes Element der Zielmenge Y wird „mindestens ein mal" getroffen.

Beispiel

$\sin x : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$

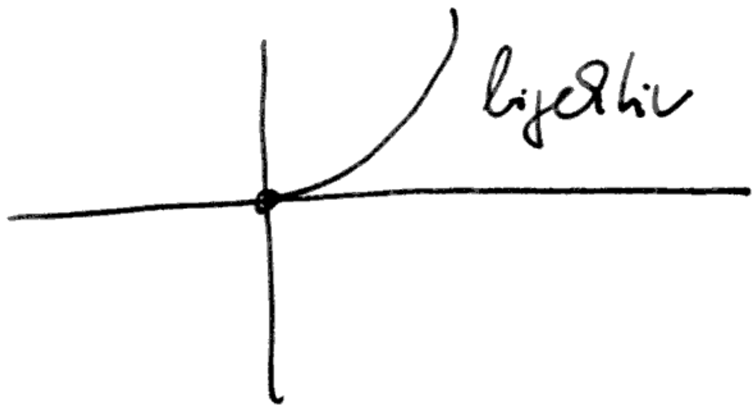
Jede Gerade $y = c$ mit $c \in [-1, 1]$ schneidet den Graphen mindestens einmal.

bijektiv

f bijektiv $\Longleftrightarrow$ f injektiv und f surjektiv

Beispiele und Gegenbeispiele

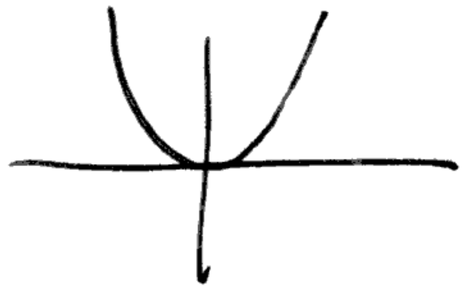
① $f: \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$
$x \to x^2$



bijektiv

②

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \to x^2$



nicht bijektiv

[nicht injektiv, nicht surjektiv]

Anwendung

(1) Sind bei einem Homomorphismus die Gruppen identisch, so spricht man von einem

Endomorphismus
(ἔνδον = innen)

Beispiel

$$f: (\mathbb{R},\cdot) \to (\mathbb{R},\cdot)$$
$$x \to \frac{1}{x} \qquad x \neq 0$$

war Homomorphismus.
Wegen $(\mathbb{R},\cdot) \equiv (\mathbb{R},\cdot)$ liegt (auch) ein Endomorphismus vor.

Ist der Homomorphismus auch noch bijektiv, so spricht man von einem Isomorphismus.

(inverses gleich)

Beispiel

$\log : (\mathbb{R}^+, :) \longrightarrow (\mathbb{R}, -)$

wegen

$\log\left(\frac{x}{y}\right) = \log(x) - \log(y)$

Sind die „Gruppen" mengengleich,
und ist (dieser) Endomorphismus
dann bijektiv, spricht man von
einem **Automorphismus**.

Beispiel

Ist $(G, \circ)$ eine Gruppe und

$$f: \begin{array}{l} (G, \circ) \to (G, \circ) \\ a \to f(a) = a \end{array}$$

die identische Abbildung, so ist f
Automorphismus.

Anregungen? Wünsche?

Schickt eine Mail oder schreibt ein Posting

Unterlagen

Kostenlos als pdf auf

www.raphael-breive.de