Höhere Mathematik

für

Nebenfächler, Studienanfänger...

Video 27

Differentialgleichungen

Erste Schritte

Inhaltsverzeichnis

- Zum Ende:
  Anfangspunktprobleme
- Ausgleich, Gleichmäßig

Was ist das?

Eine Gleichung, in der – zusätzlich zu einer unbekannten Funktion $y = f(x)$ – auch noch Ableitungen bis zur n-ten Ordnung auftreten, heißt

$$\boxed{\text{gewöhnliche Differentialgleichung } n\text{-ter Ordnung}}$$

$y = f(x)$

$y' = f'(x)$ 1. Ordnung

$y'' = f''(x)$ 2. Ordnung

$y''' = f'''(x)$ 3. Ordnung

$y^{(4)} = f^{(4)}(x)$ 4. Ordnung

$\vdots$

$y^{(n)} = f^{(n)}(x)$ n-ter Ordnung

Beispiele

① $y' = 2x$ Explizite [nach y' hin aufgelöste] DGL 1. Ordnung

In Worten: Gesucht ist eine [alle?] Funktion $y = f(x)$, deren erste Ableitung y' gleich $2x$ ist

Aus der Schule weiß man

$$y = x^2 \text{ „passt", weil } y' = 2x$$

aber auch

$$y = x^2 + 3 \quad \text{oder} \quad y = x^2 - 4 \quad \text{oder}$$

$$y = x^2 + C \quad [\text{Funktionenschar}]$$

② $y' = y$ Explizite DGL erster Ordnung

③ $y' + x = 0$ Implizite [d.h. nicht nach y' hin aufgelöst] DGL erster Ordnung

④ $y' + y'' \cdot y - y''' = 0$

Implizite DGL

3. Ordnung [wg y''']

$\boxed{\text{Fragen}}$ (u.a.)

→ <u>Wie</u> löst man eine DGL

→ <u>Wann</u> gibt es überhaupt eine Lösung der DGL

- <u>Wieviele</u> Lösungen (en) gibt es?

Differentialgleichungen erster Ordnung

<u>Vorbemerkung</u> Es gibt nicht das Lösungsverfahren, vielmehr ist das „Lösungsweg" vom „Typ der DGL" abhängig.

Vorab: geometrische Betrachtung

Beispiel $\quad y' = 2x$ oder $yy' + x = 0$

$$\Leftrightarrow \quad y' = \underbrace{2\cdot x + 0\cdot y}_{f(x,y)} \text{ oder } y' = \underbrace{-\frac{x}{y}}_{f(x,y)}$$

Interpretation

In beiden Beispielen gehört zu einem Elementpunkt $(x|y)$ eine „Steigung y'“

$y' = 2\cdot x + 0\cdot y$

$(x\|y)$	y'
$(0\|0)$	0
$(1\|0)$	2
$(2\|0)$	4
$(3\|0)$	6
$(0\|1)$	0
$(0\|2)$	0
usw	

$y' = -\frac{x}{y}$

$(x\|y)$	y'
$(0\|0)$	n.d.
$(0\|1)$	0
$(0\|2)$	0
$(1\|1)$	-1
$(1\|2)$	-0.5
usw	

„Richtungsfeld“

Darstellung mit einem Matheprogramm

1. Beispiel $\quad \underline{y' = 2x}$ ~~oder~~

2. Beispiel $\quad y' = -\frac{x}{y} \qquad y \neq 0$

Lineare DGL'en erster Ordnung

„Lösungsverfahren“

(1) DGL'en mit „trennbaren“ Variablen

$$y' = f(x) \cdot g(y)$$

"getrennte" Variablen

1. Beispiel

$$y' = y \qquad \Big|\; y' = \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = y \qquad \Big|\; \cdot\, dx$$

$$dy = y\,dx \qquad \Big|\; : y \qquad y \neq 0$$

$$\frac{1}{y}\,dy = dx \qquad \Big|\; \int$$

y=0 ist erkennbar Lösung

$$\int \frac{1}{y}\,dy = \int dx$$

$$\ln|y| = x + C \qquad | \, e$$

[wobei die auch „links" auftauchende Konstante in dem „rechten C" steckt]

$$|y| = e^{x+C}$$
$$= e^x \cdot e^C$$

$$\boxed{y = \pm e^C \cdot e^x}$$

<u>Bem.:</u> Die „triviale" Lösung $y=0$ soll erst einmal „außen vor" bleiben.

Die Frage nach der <u>Vollständigkeit</u> einer Lösung einer DGL ist keinesfalls trivial.

2. Beispiel

$$y' = -\frac{x}{y}$$

$$y' = \underbrace{-x}_{f(x)} \cdot \underbrace{\frac{1}{y}}_{g(y)}$$

„Formales" Umschreiben:

$$\frac{dy}{dx} = -x \cdot \frac{1}{y} \qquad | \cdot dx$$

$$dy = -x \cdot \frac{1}{y} \cdot dx \quad | \cdot y$$

$$y\,dy = -x\,dx$$

Integration

$$\int y\,dy = \int -x\,dx$$

$$\frac{1}{2}y^2 = -\frac{1}{2}x^2 + C$$

$$\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 = C \quad \text{oder} \quad | \cdot 2$$

$$x^2 + y^2 = \tilde{C}$$ Kreise um (0,0) mit $r = \sqrt{\tilde{C}}$

3. Beispiel

$$y' - y^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$y' = y^2$$

$$\Leftrightarrow$$

$$y' = \underbrace{1}_{g(x)} \cdot \underbrace{y^2}_{h(y)}$$

$$\frac{dy}{dx} = 1 \cdot y^2 \quad | \cdot dx$$

$$dy = 1 \cdot y^2 \, dx \quad | : y^2 \neq 0$$

y=0 ist offenbar Lösung

$$\frac{1}{y^2} dy = 1 dx \quad | \int$$

$$\int \frac{1}{y^2} dy = \int 1 \, dx$$

$$-\frac{1}{y} \cancel{dy} = x + C$$

$$\underline{y = -\frac{1}{x+C_1}}$$

Substitution

Ziel: Zurückführen „neue" DGLen auf „alte, schon lösbare.

1. Beispiel

$$y' = \underbrace{2x - y}_{\hat{=}\, f(a\cdot x + b\cdot y + c)}$$

Substitution: $u(x) = 2\cdot x - 1\cdot y$

$\Rightarrow u'(x) = 2 - y'$

$\Rightarrow y' = 2 - u'$

$$y' = 2x - y$$

Subst.: $2 - u' = u$

$\Leftrightarrow -u' = u - 2$ [„alte" DGL]

$\Leftrightarrow -\dfrac{du}{dx} = u - 2$

$\Leftrightarrow -\dfrac{1}{u-2}\,du = dx$

od. $\dfrac{1}{u-2}\,du = -dx$ $\qquad u \neq 2$

Integration liefert:

$$\int \frac{1}{u-2}\, du = \int -1\, dx$$

$$\Rightarrow \quad \ln|u-2| = -x + C \qquad e^{()}$$

$$\Rightarrow \quad |u-2| = e^{-x+C}$$

$$\Rightarrow \quad u-2 = \pm e^{-x+C}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{u(x) = \pm e^{-x+C} + 2}$$

Rücksubstitution:

$$u(x) = 2x - y$$

$$\Leftrightarrow \quad y = 2x - u(x)$$

$$\boxed{y = 2x \mp e^{-x+C} - 2}$$

2. Beispiel

$$y' = (x+y)^2$$

$$\exists \left[f(ax+by+c) \right]$$

Sei $u(x) := x+y$

$$\Rightarrow u' = 1 + y' \Rightarrow y' = u' - 1$$

$$y' = (x+y)^2$$

Subst

$$u' - 1 = u^2$$

$$u' = u^2 + 1$$

$$\frac{du}{dx} = u^2 + 1 \qquad \Big| \cdot dx \ \Big| : (u^2+1)$$

$$\frac{1}{u^2+1}\, du = dx$$

$$\int \frac{1}{u^2+1} = \int dx$$

$$\arctan(u) = x + C_1'$$

$$u = \tan(x + C_1')$$

Rücksubstitution

$$u(x) = x + y$$

$$\tan(x + c) = x + y$$

$$\underline{\underline{y = \tan(x + c) - x}}$$

3. Beispiel

$$y' = \frac{y}{x} - \left[\frac{x}{y}\right]^2$$

$$\left[\; y' = f\left(\frac{x}{y}\right) \text{ mit } u(x) = \frac{x}{y} \text{ o.ä.} \;\right]$$

Man substituiert:

$$u(x) = \frac{y}{x} \quad ; \quad \left[\frac{x}{y}\right]^2 = \left[\frac{1}{u}\right]^2$$

$$u'(x) = \frac{y' \cdot x - y \cdot 1}{x^2} \quad \text{[Quotientenregel]}$$

Auflösen nach y':

$$u' \cdot x^2 + y = y' \cdot x$$

$$\underline{\underline{y'}} = x \cdot u' + \frac{y}{x}$$

$$\underline{\underline{= x \cdot u' + u}}$$

Substitution der AusgangsDGL

$$y' = \frac{y}{x} - \left[\frac{x}{y}\right]^2$$

$$\Leftrightarrow \quad x \cdot u' + u = u - \frac{1}{u^2} \quad \Big| -u$$

Ordnen:

$$x \cdot \frac{du}{dx} = -\frac{1}{u^2} \quad \Big| \cdot u^2 \Big| : x \neq 0 \ \underline{\underline{\text{s.o.}}}$$

$$u^2 \frac{du}{dx} = -\frac{1}{x} \quad \Big| \cdot dx$$

$$u^2 du = -\frac{1}{x} dx \quad \Big| \text{ Integration}$$

$$\frac{1}{3} u^3 = -\ln|x| + C$$

$$\underline{\underline{u = \sqrt[3]{-3\ln|x| + 3C}}}$$

Rücksubstitution liefert:

$$u = \frac{y}{x} \Leftrightarrow$$

$$y = x \cdot u$$

$$\underline{\underline{y = x \cdot \sqrt[3]{-3\ln|x| + 3c}}}$$

Lineare DGL 1. Ordnung

allgemein $y' + g(x)\cdot y = h(x)$

Falls $h(x) \equiv 0$: homogene DGL

Sonst: inhomogene DGL

Beispiel

homogene, lineare DGL

$$y' + \sin(x)\cdot y = 0$$

$$\boxed{y'} + g(x)\cdot y = \cancel{g(x)}\; h(x)$$

$$\frac{dy}{dx} = -\sin(x)\cdot y \quad \Big| : y \neq 0$$

$y = 0$ ist offenbar Lös.

$$\frac{1}{y}\,dy = -\sin(x)\,dx \quad \Big| \int$$

$$\ln|y| = -\cos(x) + C_1$$

$$|y| = e^{-\cos(x)+C}$$

$$y = \pm e^{-\cos(x)+C}$$

Verallgemeinerung

$$y' + y \cdot g(x) = 0$$

[homogen, linear DGL]

$$\frac{dy}{dx} = -y \cdot g(x) \quad | \cdot dx \quad | : y$$

$$\frac{1}{y}\,dy = -g(x)\,dx \quad | \int$$

$$\ln|y| = \int -g(x)\,dx$$

$$y = C \cdot e^{-G(x)} \quad \text{mit } G(x) = \int g(x)\,dx$$

Inhomogene, lineare DGL

Verfahren „Variation der Konstanten C" nach Lagrange

1. Schritt Man löst das zugehörige homogene DGL

2. Schritt Man setzt $C = C(t)$

Beispiel

$$y' + 2xy = x + e^{-x^2}$$

1. Schritt Man löst die homogene DGL

$$y' + 2x \cdot y = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -2xy \quad |:y \neq 0 \quad | \cdot dx$$

$$\frac{1}{y}\,dy = -2x\,dx \quad |\int$$

$$\ln|y| = \cancel{\ln} - x^2 + C$$

$$\boxed{y = \bar{C} \cdot e^{-x^2}}$$

2. Schritt Die zugehörige inhomogene DGL

$$y' + 2x \cdot y = x + e^{-x^2}$$

„löst" man mit dem Ansatz

$$y = \underbrace{\bar{C}(x)}_{\text{"Variation der Konstanten"}} \cdot e^{-x^2}$$

Man berechnet ~~$\bar{C}(x)$~~ y':

$$y' = \bar{C}' \cdot e^{-x^2} + \bar{C} \cdot (-2x) \cdot e^{-x^2}$$

Man setzt y, y' in die inhomogene DGL und berechnet $\bar{C}$:

$$\underbrace{\bar{C}' \cdot e^{-x^2} + \cancel{\bar{C}(-2x) \cdot e^{-x^2}}}_{y'} \cancel{+ 2x \cdot \underbrace{\bar{C} \cdot e^{-x^2}}_{y}} = x + e^{-x^2}$$

Man weiß nun fast!

$$\bar{C}' \cdot e^{-x^2} = x + e^{-x^2} \quad \Big| : e^{-x^2} \neq 0$$

$$\bar{C}'(x) = \frac{e^{-x^2} + x}{e^{-x^2}}$$

$$= 1 + x \cdot e^{x^2}$$

$$\Rightarrow \quad \bar{C}(x) = x + \int x \cdot e^{x^2}$$

$$= x + \frac{1}{2} e^{x^2} + \tilde{C}$$

Ausgangsgleichung „Variation der Konstanten" war:

$$y = \bar{C}(x) \cdot e^{-x^2}$$

also erhält man

$$\underline{\underline{y = \left[x + \frac{1}{2} e^{x^2} + \tilde{c}\right] \cdot e^{-x^2}}}$$

als Lösung der inhomogenen DGL

Zum Schluß(!)

Das Anfangswertproblem

Oftmals nicht alle Lösungen zur DGL, sondern „spezielle" Lösung

Beispiel

$y' = 2x \quad$ AWP: $\quad y(1) = 10$

1. Schritt Allgemeine Lösung der DGL

$$y' = 2x \quad | \int$$

$$\int y' = \int 2x$$

$$y = x^2 + C$$

2. Schritt Berechnung von C für $y(1) = 10$

$$y(1) = 10 = 1^2 + C$$

$$C = 9$$

$\underline{\underline{y = x^2 + 9}}$ löst die DGL mit AWP $y(1) = 10$

Weitere Videos zum Thema

Differentialgleichungen

Nr

257 - 265 „Schnupperkurs
Differenzialgleichungen"

auf meinem YOUTUBE-Kanal

Mathematikaufgaben