Höhere Mathematik
für
Studienanfänger..

VIDEO 28

Differentialrechnung mit
mehreren Veränderlichen:
Anfänge....

Inhaltsverzeichnis

- Grafik $f(x,y)$
- Grenzwert und Stetigkeit
  Beispiele, Unstetigkeit
- partielles Differenzieren
  Beispiele
- Höhenlinien
- Gradient
  Beispiele
- Eigenschaften des
  Gradienten
- totales Differential
- Tangentialebene, Beispiel

Schulmathematik:

$$f: \begin{array}{l} \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R} \\ x \rightarrow f(x) = \sin x \end{array}$$

$$g: \quad s \rightarrow g(x) = e^{s}$$

Funktion mit mehreren Veränderlichen:

$$f: \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \Rightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \rightarrow f(x,y) = \frac{1}{2} x y^2 \end{array}$$

[Physik Bewegungsenergie E
eines Körpers
$E(m,v) = \frac{mv^2}{2}$]

$$g: (x,y) \rightarrow g(x,y) = \sin(x^2+y^2) \cdot \cos x \cdot \sin y$$

Grafiken: 1

3

Grenzwert und Stetigkeit

Die „bekannten" Begriffe aus der Schulmathematik lassen sich übertragen:
hier Beschränkung auf 2 Variable

1. Beispiel $z = f(x,y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ BEISPIEL 2

$(x_0, y_0) = (0,0)$ – kein Element aus $D(f)$!

Man legt fest:

$$\boxed{\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} f(x,y) = g}$$

d.h. Wenn $(x,y) \longrightarrow (x_0,y_0)$ strebt,
dann folgt stets $f(x,y) \longrightarrow g$,
unabhängig davon, wie man sich dem Punkt (x_0,y_0) nähert.

$$f(x,y)=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

$(x_0|y_0)=(0,0)$ und wir nähern uns dem Punkt $(0|0)$ längs der Geraden $y=3x$

also ist

$$f(x,y)=f(x,3\cdot x)=\frac{x^2-9x^2}{x^2+9x^2}=\frac{-8x^2}{10x^2}=-\frac{4}{5}$$

also ist

$$\lim_{(x|y)\to(0|0)} f(x,y)=\lim\left[-\frac{4}{5}\right]=\underline{-\frac{4}{5}}$$

$(x_0|y_0)=(0,0)$ und wir nähern uns dem Punkt (0.0) längs der Geraden $y=1\cdot x$, also ist

$$f(x,y)=f(x,1\cdot x)=\frac{x^2-1\cdot x^2}{x^2+1\cdot x^2}=\frac{0}{2x^2}=0$$

also

$$\lim_{(x|y)\to(0|0)} f(x,y)=\lim(0)=0$$

5

d.h. $f(x,y)$ besitzt an der Stelle $(0|0)$ <u>keinen</u> eindeutig bestimmbaren [d.h. vom Weg unabhängigen Grenzwert.

Stetigkeit

Wie in der Schulmathematik legt man fest:

f stetig an (x_0, y_0), falls der Grenzwert an dieser Stelle [eindeutig] vorhanden ist und mit dem Funktionswert an dieser Stelle übereinstimmt.

$$\lim_{(x,y) \to (x_0, y_0)} f(x,y) = g = f(x_0, y_0)$$

Beispiel

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{4xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

BEISPIEL 2

Ist an der Stelle $(0,0)$ unstetig.

1.) Wir nähern uns der Stelle längs der x-Achse [d.h. $y=0$]

$$f(x,0) = \frac{0}{x^2} = 0$$

$$\lim f(x,0) = \lim 0 = 0$$

2) Wir nähern uns der Stelle längs der Winkelhalbierenden $y=x$

$$f(x,\underset{y=}{x}) = \frac{4x\cdot x}{x^2+x^2} = \frac{4x^2}{2x^2} = 2$$

$$\lim f(x,x) = \lim 2 = 2$$

Der Grenzwert ist nicht eindeutig d.h. wegabhängig.

Beispiel

$$f(x,y) = x^2 \cdot \sin y$$ (BEISPIEL)

<u>Behauptung</u> $f(x,y)$ ist auf $D(f) = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ stetig

<u>Beweis</u> Sei $(x_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ein beliebiger Punkt.

Seien (x_n) und (y_n) zwei beliebige Zahlenfolgen mit

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x_0$$

$$\lim_{n \to \infty} y_n = y_0$$

Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty}\left[f(x_n,y_n)\right] = \lim_{n\to\infty}\left[x_n^2 \cdot \sin(y_n)\right]$$

$$\overset{\text{Grenzwertsätze}}{=} \lim_{n\to\infty} x_n^2 \cdot \lim_{n\to\infty} \sin(y_n)$$

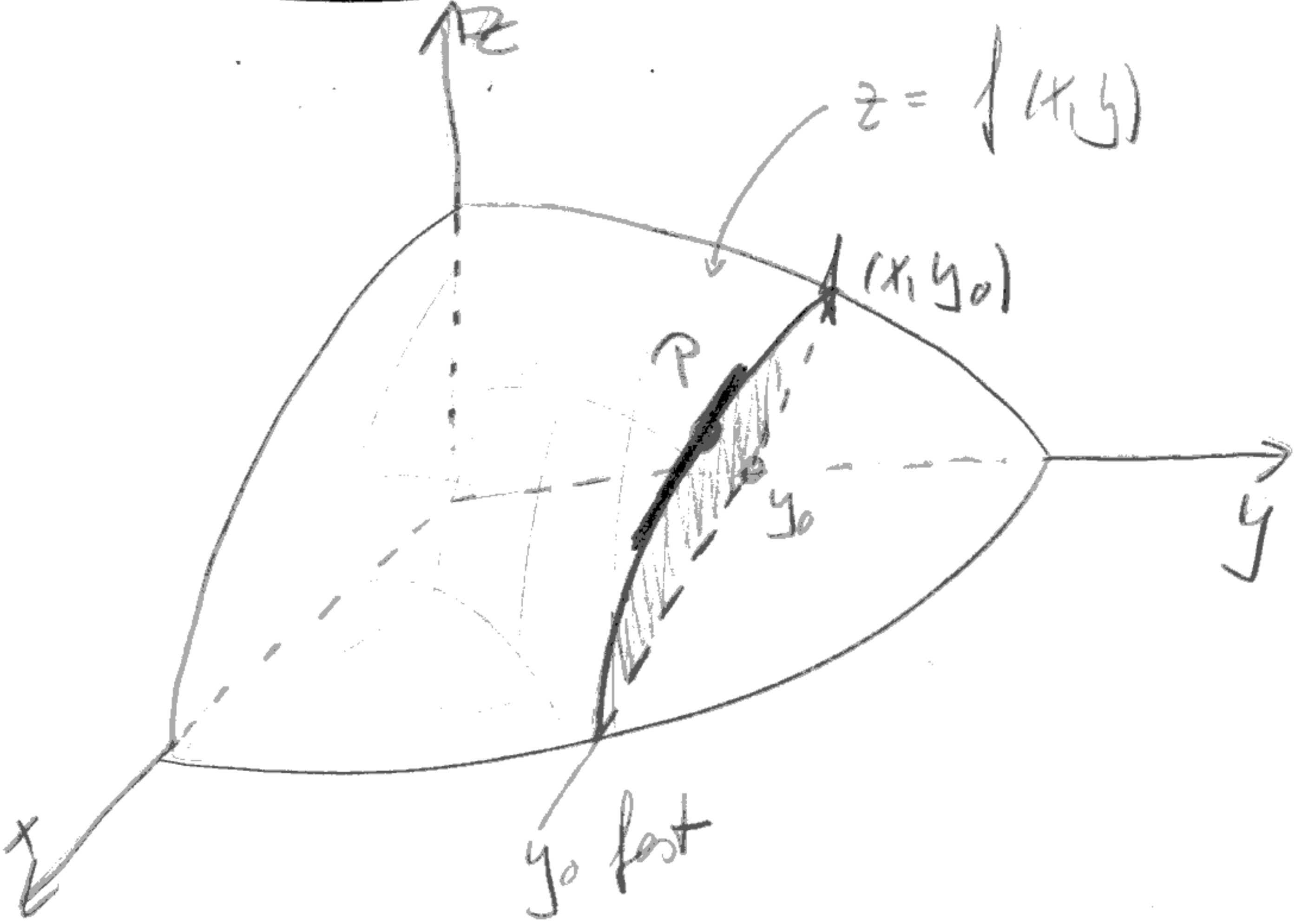
$$\overset{\text{Rechnen mit Grenzwerten}}{=} \left[\lim x_n\right]^2 \cdot \sin\left[\lim y_n\right]$$

$$= \left[x_0\right]^2 \cdot \sin\left[y_0\right]$$

$$= x_0^2 \cdot \sin(y_0)$$

$$\overset{!}{=} f(x_0,y_0) = x_0^2 \cdot \sin(y_0)$$

[Partielles] Differenzieren



Prinzip Man wählt „eine Variable" aus und betrachtet die andere [oder die anderen] als Konstante

also z.B

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}$$

(M)

$$= f_x \quad \text{[partielle Ableitung (nach x)]}$$

Beispiele

(1) $f(x,y) = x^2 - 2x\,y + y^2$

$f_x = f_x(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 2y + 0$

~~(2) g(x,y~~

$f_y = f_y(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y} = 0 - 2x + 2y$

(2) $f(a,b,c) = 3a^2 - e^b + \sin(c)$

$\frac{\partial f}{\partial a} = f_a(a,b,c) = 6a - 0 + 0$

$\frac{\partial f}{\partial b} = f_b(a,b,c) = 0 - e^b + 0$

$\frac{\partial f}{\partial c} = f_c(a,b,c) = 0 - 0 + \cos(c)$

Höhenlinie und Gradient

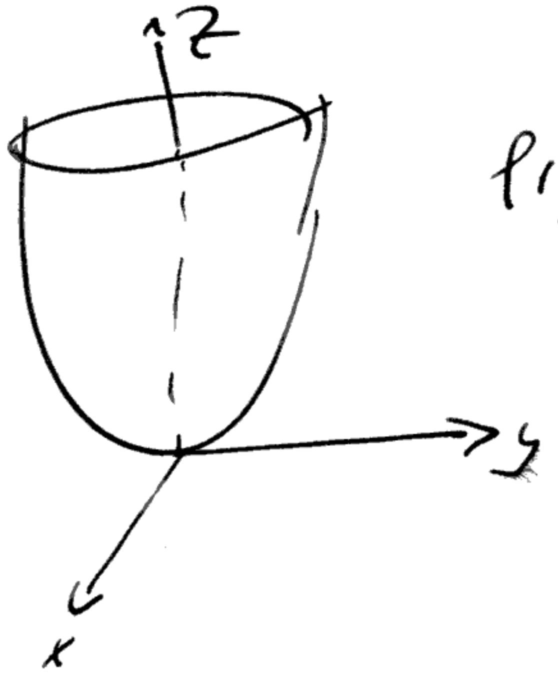
Unter einer „Höhenlinie" einer Funktion $z=f(x,y)$ versteht man eine Gleichung der Form

$$f(x,y)=c \quad \text{mit } c\in\mathbb{R}$$

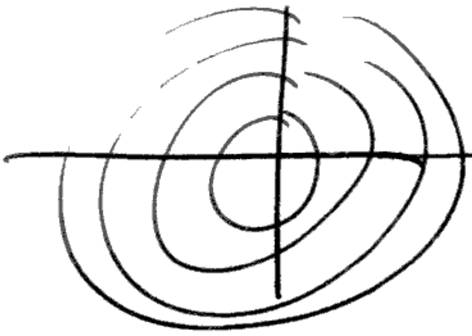
Geom: Die Fläche $f(x,y)=z$ wird „parallel zur x-y-Ebene" in „Scheiben" geschnitten und die „Schnittlinien" werden in die x-y-Ebene projiziert

Sei $f(x,y)=x^2+y^2$

Grafik



$f(x,y) = x^2 + y^2$



$x^2 + y^2 = c \; (c>0)$

Konzentrische Kreise mit $M(0|0)$ und $r = \sqrt{c}$

„Höhenlinien“

Gradient

Unter dem „Gradienten" einer Funktion $f(x,y)$ versteht man den „Vektor der partiellen Ableitungen":

$$\operatorname{grad} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Beispiel

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 0 = 2x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0 + 2y = 2y$$

$$\operatorname{grad} f = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$$

Gradient und Höhenlinie

$f(x,y) = x^2 + y^2$

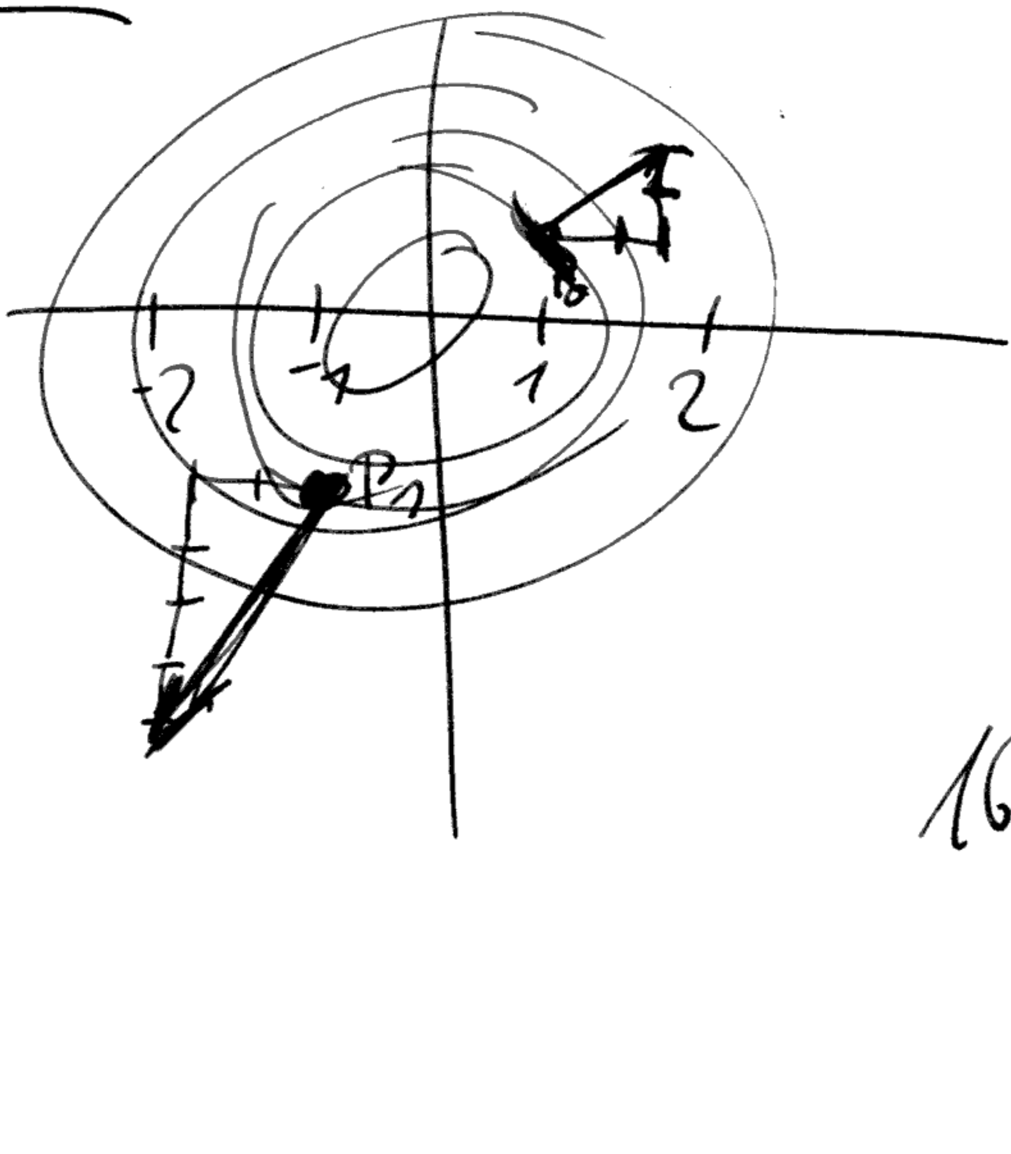
$P_0(1|1) \qquad P_1(-1|-2)$

$\operatorname{grad} f = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$

$(\operatorname{grad} f)(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} 2x|_{x_0} \\ 2y|_{y_0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 1 \\ 2\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$(\operatorname{grad} f)(x_1,y_1) = \begin{pmatrix} 2x|_{x_1} \\ 2y|_{y_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot(-1) \\ 2(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}$

Höhenlinie



Man erkennt

(1) Der Gradient steht immer senkrecht auf der Höhenlinie.

(2) Der Gradient zeigt immer in „Richtung des steilsten Anstieges".
[nicht unbedingt in direkter Gipfelrichtung]

Analog „baut" man die „Tangentialebene im Punkt P_0 an die Fläche $z = f(x,y)$"

$$y = y_0 + f'(x_0)(x - x_0)$$

Ebene

$$z = f(x_0, y_0) + \text{"Steigungsvektor"} \cdot \text{"Ortsvektor"}$$

$$= f(x_0, y_0) + \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{x_0 y_0} \\ \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{x_0, y_0} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$$

$$z = f(x_0, y_0) + \operatorname{grad} f\Big|_{P_0} \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$$

ausgeschrieben:

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{P_0}(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(y - y_0)$$

oder noch kürzer

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

totales Differential

Beispiel

$$f(x,y) = 2x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2$$

$P_0(1|1)$

gesucht: Tangentialebene an f in P_0

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2 - x \qquad \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{P_0} = 2 - 1 = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0 - 0 - y$$

$$= -y \qquad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{P_0} = -1$$

$$(\operatorname{grad} f)\big|_{P_0} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$z = f_{P_0} + \operatorname{grad} f\big|_{P_0} \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$$

$$= f_{P_0} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x - 1 \\ y - 1 \end{pmatrix}$$

$$= f_{P_0} + 1\cdot(x-1) - 1(y-1)$$

$$= 1 + x - 1 - y + 1$$

$$= x - y + 1 \qquad \text{TE}$$