Höhere Mathematik
für
Studienanfänger, Nebenfächler usw

VIDEO 17

[Versuch einer einfachen]

Einführung
in die
Fourierreihen

alle Unterlagen als kostenfreies pdf
unter
www.raphael-beer.de

Wie bei den Taylorreihen, bei der
„komplizierte Funktionen $\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$"
durch „einfache Polynome" „ersetzt werden".

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\left[x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \dots\right]$$

will man nun
„komplizierte periodische Funktionen"
durch „einfache periodische Funktionen
sin / cos ersetzen":

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos(nx) + b_n \cdot \sin(nx)$$

die komplizierte

oft auch $\frac{a_0}{2}$ oder $\frac{a_0}{\pi}$

mit $f(x+p) = f(x)$

1

Fragen, Bemerkungen, Hinweise

bevor es losgeht...

(1) Welche Funktionen $f(x)$ lassen sich überhaupt in eine Fourierreihe entwickeln?
[Fourier, Jean Baptiste Joseph 1768–1830]

(2) Stellt jede Fourierreihe eine Funktion dar?

(3) siehe (1)(2): welche Bedingungen müssen herrschen?

(4) Sprechweisen:

- harmonische Analyse
  oder Fourieranalyse
  Berechnung von a_n, b_n [dieses Video]
- harmonische Synthese
  oder Fouriersynthese
  Umkehrung der harmonischen Analyse
- a_i, b_i „Fourierkoeffizienten"

Man benötigt

(1) $m \in \mathbb{N}$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) = 0$$

(2) $m, n \in \mathbb{N}$ und $m \neq n$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx) \cdot \sin(nx) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) \cdot \cos(nx) = 0$$

(3) $m, n \in \mathbb{N}$ beliebig

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx) \cdot \cos(nx) = 0$$

(4) n beliebig, $n \in \mathbb{N}$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \cdot \sin(nx) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \cdot \cos(nx) = \pi$$

Bemerkung

→ 4 3 2 werden auch

„Euler-Fourier-Formeln"

oder

„Orthogonalitätsrelationen der trigonometrischen Funktionen"

genannt.

→ zum Beweis können die Integrale über „partielle Integration" plus „Substitution" berechnet werden.

→ „Einfacher" gehts mit der „Euler-Formel":

$$e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)$$

→ oder aber über die Eigenschaften des sog. „trigonometrischen Fundamentalsystems":

$$1;\ \cos x;\ \sin x;\ \cos(2x);\ \sin(2x);\ \ldots$$

4

Berechnung von a_0

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \cdot \sin mx \quad \Big| \int_{-\pi}^{\pi}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} 1\,dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx}_{=0\ (3)} + b_n \cdot \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx}_{=0\ (3)}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) = \frac{a_0}{2} \cdot \left[x \Big|_{-\pi}^{\pi} \right] = \frac{a_0}{2} \left[\pi - (-\pi) \right] = \frac{a_0 \cdot 2\pi}{2} = a_0 \cdot \pi$$

also

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$$

Berechnung von a_n

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos(nx) + b_n \cdot \sin(nx) \quad \Big| \cdot \cos(mx) \quad \int_{-\pi}^{\pi}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx = \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}\cos mx}_{0 \text{ nach } (1)} + \sum a_n \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cdot \cos(nx)}_{\cancel{\pi \text{ nach } 3} \quad \pi \text{ nach } (4)\ m=n} + b_n \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \cdot \cos mx}_{0 \text{ nach } (3)}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos mx = a_n \cdot \pi$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos nx}}$$

Völlig analog erhält man nach Multiplikation mit $\sin(mx)$ (!!) und $\int_{-\pi}^{\pi}$:

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \sin(nx)$$

Bevor es zu den Beispielen geht!

- Im Internet gibts viele Anlaufstellen zur Integral-Fourierreihen entwicklung. Gute Anlaufstelle ist

<u>Wolfram Alpha</u>

- Rechnet man – wie gleich – „zu Fuß“, sollte man wissen:

$\Rightarrow f(x) = f(-x)$ $\quad$ f ist symmetrisch / gerade

$\Rightarrow f(-x) = -f(x)$ $\quad$ f ist antisymm. / ungerade

$\Rightarrow$ Das Integral einer antisymmetrischen Funktion über ein symmetrisches Intervall – $[-\pi, \pi]$ – ist 0, d.h.

$f(x)$ ist symmetrische Funktion dann ist $b_n \equiv 0$

$f(x)$ ist antisymmetrische Funktion dann ist $a_0 = a_n \equiv 0$

– "1" und „$\cos nx$" sind symmetrisch.
Sie spannen den „Raum der symm. Funktionen" auf.

→ „$\sin(nx)$" sind antisymmetrisch.
Sie spannen den „Raum der antisymmetrischen Funktionen" auf.

Beispiele

1. Beispiel

$$f(x) = \begin{cases} -1 & -\pi < x < 0 \\ 0 & x = -\pi; 0; +\pi \\ +1 & 0 < x < \pi \end{cases}$$

Die Funktion ist offenbar ungerade, es genügt also die Berechnung von b_n:

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \sin nx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} f(x) \cdot \sin nx + \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(x) \cdot \sin nx$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(x) \cdot \sin nx$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} 1 \cdot \sin nx = \frac{2}{\pi} \left[-\frac{1}{n} \cos nx \right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\underbrace{-\frac{1}{m}\cos(m\cdot\pi)}_{o.G} - \underbrace{\left(-\frac{1}{m}\cos 0m\right)}_{u.G.}\right]$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{1}{m}\cos(m\pi) + \frac{1}{m}\right]$$

n ungerade : $\frac{2}{\pi}\left[-\frac{1}{m}\cdot(-1) + \frac{1}{m}\right] = \frac{4}{n\pi}$

n gerade: $\frac{2}{n}\left[-\frac{1}{m}\cdot 1 + \frac{1}{m}\right] = 0$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \sin(nx)$$

also (n ungerade)

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi\cdot(2n-1)} \sin(2n-1)\cdot x$$

oder

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)\cdot x}{2n-1}$$

11

$n=1$ $\qquad \frac{4}{\pi} \frac{\sin 1 \cdot x}{1}$ -

$n=2$ $\qquad \frac{4}{\pi} \frac{\sin 3x}{3}$

$n=3$ $\qquad \frac{4}{\pi} \frac{\sin 5x}{5}$

$n=4$ $\qquad \frac{4}{\pi} \frac{\sin 7x}{7}$

2. Beispiel

$$f(x) = |x| \;\#$$

Wegen $f(x) = f(-x)$ ist $b_n \equiv 0$.

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x|\,dx \overset{!}{=} \frac{1}{\pi} \cdot 2 \int_0^{\pi} x\,dx$$

$$= \underline{\underline{\pi}}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f \cdot \cos nx$$

$$= \frac{1}{\pi} \cdot 2 \cdot \int_0^{\pi} x \cdot \cos(nx)$$

partielle Integration leicht

$$\int \cos nx = +\underline{\underline{\frac{1}{n}}} \sin nx$$

$\downarrow$

$$= \frac{2}{\pi} \cdot \left(\frac{\cos(n\pi) - 1}{n^2} \right)$$

Ist n gerade, ist der Zähler des Bruches 0 : $a_n = 0$

Ist n ungerade ist $a_n = -\frac{4}{n^2 \pi}$

Damit ergibt sich

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1) \cdot x}{(2n-1)^2}$$

$$n=1: \quad \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left[\frac{\cos x}{1^2}\right]$$

$$n=2: \quad \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left[\frac{\cos(3x)}{3^2}\right]$$

$$n=3: \quad \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left[\frac{\cos(5x)}{5^2}\right]$$

$$n=4: \quad \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left[\frac{\cos(7x)}{7^2}\right]$$

3. Beispiel

Die „Sägezahnfunktion"

$$f(x) = x \qquad -\pi < x < \pi$$

Erkennbar gilt $f(-x) = -x = -f(x)$, also berechnet man b_n:

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \sin(nx)$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cdot \sin(nx)$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} \underset{v}{x} \cdot \underset{u'}{\sin(nx)} \qquad \text{partielle Integr.}$$

$$= \frac{2}{\pi} \left[-\frac{1}{n} \cos(nx) \cdot x \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{1}{n} \cos nx \cdot \underline{1} \right]$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{1}{n}\cos(nx)\cdot\pi - \underbrace{\left\{ -\frac{1}{n}\cos(0)\cdot 0 \right\}}_{0} - \left\{ \frac{1}{n^2}\sin nx \Big|_0^{\pi} \right\} \right]$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{\pi}{n}\cdot(-1)^n - \left\{ \frac{1}{n^2}\sin n\pi - \frac{1}{n^2}\sin(0) \right\} \right]$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{\pi}{n}\cdot(-1)^n - 0 + 0 \right]$$

$$= -\frac{2\cdot(-1)^n}{n}$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \sin(nx)$$

$n=1:$ $2\cdot\sin(x)$

$n=2:$ $-\sin(2x)$

$n=3:$ $\frac{2}{3}\sin(3x)$

$n=4:$ $-\frac{1}{2}\sin(4x)$

$n=5:$ $\frac{2}{5}\sin(5x)$

$n=6:$ $-\frac{1}{3}\sin(6x)$

Ausblick

Video 18 Parameterdarstellung von

→ Kurven,

→ Flächen

→ Kurven auf Flächen: Flächenkurven

alle Unterlagen als kostenlose pdf-Datei unter

www.raphael-burri.ch