Höhere Mathematik für

Studienanfänger, Nebenfächler...

Video 19

$\boxed{\text{Euler - Formel}}$

Versuch einer „kurzen" Einführung: Formel, formaler Beweis, Folgerungen

www.raphael-bier.de

Inhalt

- Euler-Formel
- Potenzen von i
- „Herleitung" der Eulerformel
- Folgerungen, Konsequenzen, Erstaunliches

Euler-Formel

$i = \sqrt{-1}$

$$\boxed{e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \cdot \sin\varphi}$$

komplexwertige Funktion: Funktionentheorie

trigonometrische Funktionen

Zur „Herleitung" sollte man kennen:

$i = i^1$	$i^2 = i \cdot i$	i^3	i^4	i^5
i	$\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = -1$	$-1 \cdot i = -i$	$+1$	i usw

Daneben sollte man folgende Reihenentwicklungen kennen: 5

$$e^x \stackrel{!}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots = \sum_{n=0}^{k[\infty]} \frac{x^n}{n!}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \pm \dots = \sum_{n=0}^{n[\infty]} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \pm \dots = \sum_{n=0}^{n[\infty]} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Herleitung

Unter Beachtung aller nicht genannter wichtiger Aspekte:

Mit $\boxed{e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots}$

und $\boxed{x = i\varphi}$ [komplex!] ist

$$e^{i\varphi} = 1 + i\varphi + \frac{(i\varphi)^2}{2!} + \frac{(i\varphi)^3}{3!} + \ldots$$

$$= 1 + i\varphi + i^2\frac{\varphi^2}{2!} + i^3\frac{\varphi^3}{3!} + \ldots$$

$$= 1 + i\varphi - \frac{\varphi^2}{2!} - i\frac{\varphi^3}{3!} + \ldots$$

$$= \underbrace{\left[1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} \pm \ldots\right]}_{} + i \cdot \underbrace{\left[\varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \ldots\right]}_{}$$

$$= \cos\varphi + i \sin\varphi$$

Bemerkungen

(1) $$\boxed{e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\cdot\sin\varphi}$$

Sei $\varphi = \pi$

$$e^{i\pi} = \underbrace{\cos\pi}_{-1} + i\cdot\underbrace{\sin\pi}_{0}$$

$$e^{i\pi} = -1 \quad \Big| +1$$

$$\boxed{e^{i\pi} + 1 = 0}$$

e – „Funktion"

$i = \sqrt{-1}$

π

1

0

als die berühmten „5"

6

(2) Mit

$$\boxed{e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \cdot \sin\varphi}$$

$$\boxed{e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i \cdot \sin\varphi}$$

erhält man

$$e^{i\varphi} + e^{-i\varphi} = (\cos\varphi + i\sin\varphi) + (\cos\varphi - i\sin\varphi)$$

$$= 2\cos\varphi$$ oder

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}}$$

(3) Ganz ähnlich:

$$e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}$$

$$= (\cancel{\cos\varphi} + i\sin\varphi) - (\cancel{\cos\varphi} - i\sin\varphi)$$

$$= 2i\sin\varphi \quad \text{bzw}$$

$$\boxed{\sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}}$$

(8)

Noch schöner:

(4) Aus

$$\cos\varphi = \frac{e^{+i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}$$

und mit $\varphi := iy$

$$\underline{\underline{\cos(iy)}} = \frac{e^{i(iy)} + e^{-i(iy)}}{2}$$

$$= \frac{e^{-y} + e^{+y}}{2} \overset{!}{=} \underline{\underline{\cosh(y)}}$$

(5) Nicht unerwähnt bleiben darf: ~~$(a+b)^2 = a^2+b^2$~~

$$\left(\cos x + i \cdot \sin x\right)^n = \cos(nx) + i \sin(nx)$$

„Satz von Moivre",

gültig für jede komplexe (!, also auch reelle) Zahl x und jedes $n \in \mathbb{N}$.

$\boxed{\text{Ausblick zum nächsten Video}}$

Matrizen / Determinante

→ Grundlagen

→ Beispiele