Höhere Mathematik
für
Studienanfänger, Nebenfächler
usw

$\boxed{\text{VIDEO 21}}$

Determinanten

Wichtige Rechenregeln, Beispiele

Übersicht

→ 2x2 Determinanten

Beispiele

Rechenregeln

→ 3x3 Determinanten

Beispiele

Rechenregeln

→ über den Tellerrand:

n×n-Determinanten:

Weiterführendes

Zu einer $\boxed{\text{quadratischen}}$ 2×2 Matrix ist eine „~~Determinante~~" so erklärt:

$$A = (a_{ik}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad a_{ik} \in \mathbb{R} \quad (!!!)$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \overset{!}{=} a_{11}\cdot a_{22} - a_{21}\cdot a_{12}$$

„2-reihige Determinante" oder „Determinante 2. Ordnung"

Sprechweise

z.B

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1\cdot 4 - 3\cdot 2 = -2$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \det B = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot 1 - 0\cdot 0 = \underline{\underline{1}}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -6 \end{pmatrix} \quad \det C = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -6 \end{vmatrix} = 1\cdot(-6) - (-2)\cdot 3$$
$$= -6 + 6 = 0$$

aha!

$$D = \begin{pmatrix} a & b \\ ra & rb \end{pmatrix} \qquad a, b \neq 0 \qquad r \neq 0$$

$$\det(D) = \begin{vmatrix} a & b \\ ra & rb \end{vmatrix} = |a \cdot rb - r \cdot ab|$$

$$= |\underline{abr} - \underline{abr}| = 0$$

Eigenschaften und Regeln
(zur 2reihigen Determinante)

Tipp Mit dem „Ansatz"
$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ und $\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$
können alle Eigenschaften / Regeln unmittelbar „nachgerechnet" werden!

① Determinante „stürzen" [Zeilen/Spalten vertauschen]

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$(\det A = \det(A^T))$

$2 \cdot 4 - 8 \cdot 3 = 2 \cdot 4 - 3 \cdot 8$

Folgerung: Alle Det-eigenschaften für „Zeilen" gelten auch für „Spalten".

② Vertauscht man 2 Zeilen [Spalten], ändert det ihr Vorzeichen

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

$$\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} = bc - ad = -[ad - bc]$$

③ $\lambda \cdot \det(A) = \begin{vmatrix} \lambda a & \lambda b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ \lambda c & \lambda d \end{vmatrix}$ $\qquad \lambda \in \mathbb{R}$

$= \begin{vmatrix} \lambda a & b \\ \lambda c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & \lambda b \\ c & \lambda d \end{vmatrix}$

$\begin{vmatrix} \lambda a & \lambda b \\ c & d \end{vmatrix} = \lambda ad - \lambda bc$

$\begin{vmatrix} a & b \\ \lambda c & \lambda d \end{vmatrix} = \lambda ad - \lambda bc$

$\begin{vmatrix} \lambda a & b \\ \lambda c & d \end{vmatrix} = \lambda ad - \lambda bc$

$\begin{vmatrix} a & \lambda b \\ c & \lambda d \end{vmatrix} = \lambda ad - \lambda bc$

$$\begin{vmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{vmatrix} = \lambda a \lambda d - \lambda c \lambda b$$

$$= \lambda^2 ad - \lambda^2 bc$$

$$= \lambda^2 [ad - bc]$$

$$= \lambda^2 \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

6

(4) $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \overset{?}{=} 0$

mindestens eine der folgenden Bedingungen ist erfüllt:

- alle Elemente einer Zeile/Spalte sind 0
- 2 Zeilen/Spalten sind je ein „Vielfaches" von/zu einander

[- 2 Zeilen/Spalten stimmen überein]

z.B. $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 2\cdot 0 - 0\cdot 1 = 0$

$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 2\cdot 6 - 4\cdot 3 = 0$

$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 2\cdot 3 - 2\cdot 3 = 0$

(5) Seien A, B jeweils 2×2 Matrizen. Dann gilt $\boxed{A \cdot B \neq B \cdot A}$

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$$

(6) Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$A_+ = \begin{pmatrix} a+rc & b+rd \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = \det(A_+)$$

denn: $\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

$$\det(A_+) = \begin{vmatrix} a+rc & b+rd \\ c & d \end{vmatrix}$$

$$= (a+rc)d - c(b+rd)$$

$$= ad + \cancel{rcd} - bc - \cancel{rcd}$$

$$= \underline{\underline{ad - bc}}$$

Einfach zu sehen ist:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \det A = 1$$

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \det N = 0$$

Dreireihige Determinanten

→ Alle „Regeln" für 2 reihige Determinante gelten auch für 3 reihige

Berechnung einer 3 reihige Det

„Sarrusregel" (nur für 3-reihige)

Entwicklungssatz nach Laplace (gültig für alle Det!!)

Die „Sarrus"regel [1800]

$$\left|\begin{matrix}2 & 4 & 1\\ 3 & 2 & 1\\ 1 & 2 & 3\end{matrix}\right|\begin{matrix}2 & 4\\ 3 & 2\\ 1 & 2\end{matrix}$$

nur 3x3

$$2\cdot2\cdot3+4\cdot1\cdot1+1\cdot3\cdot2-1\cdot2\cdot1-2\cdot1\cdot2-3\cdot3\cdot4$$

$$= 12+4+6-2-4-36=\underline{\underline{-20}}$$

10

Determinanten-Entwicklungssatz

Bei $n \geq 4$ wird's kompliziert:

<u>Vorbemerkung</u> Sei $A = (a_{ij})$ eine $n \times n$ Matrix.

Unter $S_{ik}(A)$ versteht man <u>die</u> Matrix, die man erhält, wenn man aus $A = (a_{ij})$ die <u>i-te Zeile</u> <u>und</u> die k-te Spalte wegstreicht.

[<u>Streichungsmatrix</u> $S_{ik}(A)$]

<u>Beispiele</u>

① $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

$S_{11}(A) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ oder $S_{23}(A) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

usw.

Bem Mit diesem „Konstrukt" kann man sich von (n×n)-Matrizen [n×n Determinanten] auf (n-1 × n-1) Matrizen [Determinante] n-2 × n-2 Matrizen [Determinante] „runterhangeln", bis man bei „3×3" angelangt ist.

Wie das genau geht, sagt der

Entwicklungssatz von Laplace für n × n Matrizen [Determinanten]

Sei A eine n×n Matrix. Dann gilt

(1) Für jedes $j \in \mathbb{N}$

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{j+k} a_{jk} \cdot \boxed{\det S_{jk}(A)}$$

„Entwicklung nach der j-ten Zeile"

2.) Für jedes $k \in \mathbb{N}$

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{(-1)^{j+k}}_{+1/-1} a_{jk} \cdot \boxed{\det S_{jk}(A)}$$

„Entwicklung nach der k-ten Spalte"

Bemerkungen

→ Die Determinanten der Streichungsmatrizen heißen „Unterdeterminanten":

$$\det S_{jk}(A)$$

→ Die „wechselnden Vorzeichen" $(-1)^{j+k}$ bilden ein „Schachbrettmuster", z.B.

$$\begin{vmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{vmatrix} \quad 4 \times 4$$

- Der „Rechenaufwand" steigt sehr ins „Unermeßliche"

Eine 5×5 Determinante liefert nach Laplace 5 4×4 Determinanten, jede 4×4 Determ. liefert ~~3~~ 4 3×3 Det, also ~~3·4·5 = 60~~ 4·5 = 20 3-reihige Determinanten

Beispiel

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -20 \quad [\text{Seite } 10]$$

Entwicklung nach der 1. Zeile (ZB)

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= + \; 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \quad \text{wg} \quad \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$- \; 4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \quad \text{wg} \quad \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$+ \; 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \quad \text{wg} \quad \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \cdot [6-2]$$
$$-4 \cdot [9-1]$$
$$+1 \cdot [6-2]$$

$$= 2 \cdot 4 - 4 \cdot 8 + 1 \cdot 4 = 8 - 32 + 4$$

$$\underline{\underline{= -20}}$$

Beispiel

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & -1 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 8 & 1 \\ 1 & -1 & -4 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 3 & -4 & 0 \end{vmatrix}$$

2. Zeile

1. Schritt Entwicklung nach der 2. Zeile, es bleibt „nur"

$$= -3 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 & -1 & 7 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -4 & -1 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

erneute Entw. n.d. 2. Zeile

$$= -3 \left[-2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 & 7 \\ -1 & -4 & -1 \\ -2 & 3 & 0 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 & 7 \\ 1 & -4 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} + \cancel{0 \cdot \big|\;\big|} \right.$$

$$\left. + 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -4 \\ 0 & -2 & 3 \end{vmatrix} \right] \overset{3x\ \text{Sarrus}}{=} -462$$

Was ich weglasse..

→ Beweis $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$
(eher nicht so einfach!)

→ $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$

→ det der oberen / unteren Dreiecksmatrix

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & & \vdots \\ & & b_{33} \dots & \\ 0 & & & b_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\det B = b_{11} \cdot b_{22} \cdot \dots \cdot b_{nn}$$

- Viele „Rechenregeln für det"
plus Beweis

usw usw

Ausblick komplexe Matrizen..
einmal 'reinschnuppern..