Höhere Mathematik für Studienanfänger,

Nebenfächler ...

VIDEO 23

Kurven in der Ebene

www.raphael-blum.de

Inhaltsverzeichnis

- Parameterdarstellung im Kurve: Beispiele
- Tangentengleichung in Vektorform: Beispiel
- Normalengleichung in Vektorform: Beispiel
- Maxima und Minima: Beispiel
- Krümmung
  - Beispiele
- Krümmungskreis: anschaulich mit Geogebra

Parameterdarstellung

Beispiele

① $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$ $t \in [0, 2\pi]$

oder

$t \in [0, 2\pi[$

② $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}$ $t \in \mathbb{R}$

③ $\vec{x}(t) = \begin{matrix} r \cdot (t - \sin t) \\ r \cdot (1 - \cos t) \end{matrix}$ z. B. $r = 2$

$t \in [0; 6\pi]$

Allgemein

$$\left.\begin{array}{l} f(t) = (x(t), y(t)) \quad \text{oder} \\ \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \quad \text{oder} \\ G: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \end{array}\right\} \quad t \in I \subset \mathbb{R}$$

etwas komplizierter

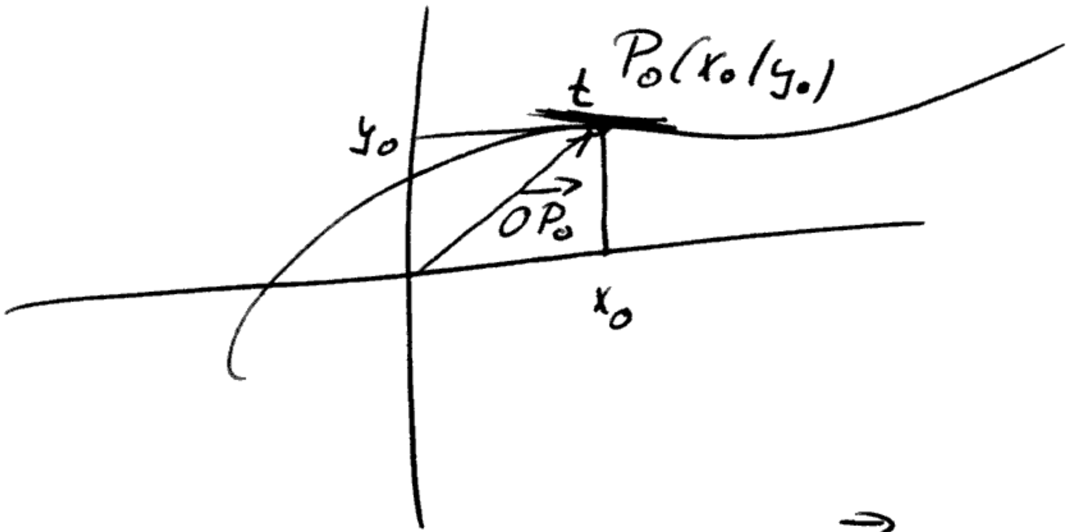
$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \cos\varphi + \cos^2\varphi \\ \sin\varphi + \cos\varphi \sin\varphi \end{pmatrix}$$

$$\varphi \in [0; 2\pi[$$

„Kardioide“ (Herzkurve)

Tangente und Normale

an eine ebene Kurve



$$t: \vec{x} = \vec{OP_0} + \lambda \cdot \vec{t}_{P_0}$$

mit $\vec{t}_{P_0}$ als Richtungsvektor der Tangente an f im P_0

Beispiele

① Tangente im $t_0 = \frac{\pi}{4}$ an

$$\vec{f}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \quad t \in [0; 2\pi[$$

keine Doppelpunkt!

$$\dot{\vec{f}}(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{1. Schritt}}$ Berechnung des Punktes

$$\vec{f}(t_0) = \begin{pmatrix} \cos t_0 \\ \sin t_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{4} \\ \sin \frac{\pi}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{2. Schritt}}$ „Steigung" an $t_0 = \frac{\pi}{4}$

$$\dot{\vec{f}}(t_0) = \begin{pmatrix} -\sin \frac{\pi}{4} \\ \cos \frac{\pi}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

④

Tangentenvektor [Tangentialvektor]
an der Stelle $t_0 = \frac{\pi}{4}$
bezgl $\vec{f}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$ ["Kreis"]

$$t: \vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Erweiterung

→ In der Ebene steht der Normalenvektor immer senkrecht auf dem Tangentenvektor; ~~mit t~~

→ Ist $\cancel{\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}}$ $\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}$ Tangentenvektor, so ist $\begin{pmatrix} -t_2 \\ t_1 \end{pmatrix}$ Normalenvektor also ist

$$n: \vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} +\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \mu \in \mathbb{R}$$

der zugehörige Normalenvektor.

6

Maxima und Minima

$$\vec{f}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \quad t \in [0; 2\pi]$$

$\boxed{S_x: \quad x(t) = \cos t}$

$\dot{x}(t) = -\sin t = 0$

$\Leftrightarrow \sin t = 0 \Leftrightarrow t_1 = 0$

$t_2 = \pi$

$t_3 = 2\pi$

$\ddot{x}(t) = -\cos t$

$\ddot{x}(0) = -\cos 0 < 0$ Max

$\ddot{x}(\pi) = -\cos\pi > 0$ Min

$\ddot{x}(2\pi) = -\cos 2\pi < 0$ Max

$P_1(\cos 0 / \sin 0) \hat{=} P_1(1/0)$

$P_2(\cos\pi / \sin\pi) \hat{=} P_2(-1/0)$

$P_3(\cos 2\pi / \sin 2\pi) \hat{=} P_3(1/0)$

7

Sei $y(t) = \sin t$

$$\dot{y}(t) = \cos t = 0$$

$$\Rightarrow t_4 = \frac{\pi}{2} \; ; \; t_5 = \frac{3\pi}{2}$$

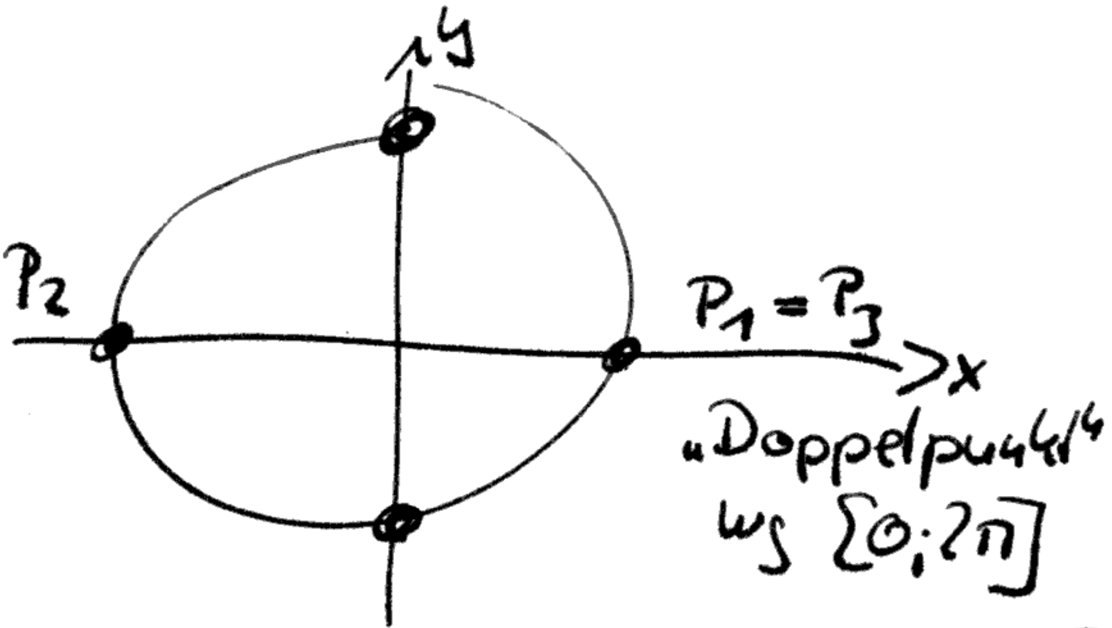
$$\ddot{y}(t) = -\sin t$$

$$\ddot{y}\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\sin\frac{\pi}{2} < 0 \quad \text{Max}$$

$$\ddot{y}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -\sin\frac{3\pi}{2} > 0 \quad \text{Min}$$

$$P_4\left(\cos\frac{\pi}{2} \,/\, \sin\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow P_4\,(0|1)$$

$$P_5\left(\cos\frac{3\pi}{2} \,/\, \sin\frac{3\pi}{2}\right) \Rightarrow P_5\,(0|-1)$$



2. Beispiel „aufgeschlossene" Parabel

$$\vec{f}(t) = \begin{pmatrix} t^2 - 2t \\ t^2 - t + 1 \end{pmatrix}$$ Schaubild

$x(t) = t^2 - 2t$

$\dot{x}(t) = 2t - 2 = 0 \Leftrightarrow t_1 = 1$

$\ddot{x}(t) = 2 > 0$ Mini

$y(t) = t^2 - t + 1$

$\dot{y}(t) = 2t - 1 = 0 \Leftrightarrow t_2 = \frac{1}{2}$

$\ddot{y}(t) = 2 > 0$ Mini

$$\vec{f}(t_1) = \vec{f}(1) = \begin{pmatrix} 1-2 \\ 1-1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{f}(t_2) = \vec{f}\left(\tfrac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} - 1 \\ \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/4 \\ 3/4 \end{pmatrix}$$

Schaubild

Krümmung

Wiederholung $f(x) = x^2$

$f'(x) = 2x$

$f''(x) = 2 > 0 \Rightarrow$ g ist

links gekrümmt

[$f'' < 0$: rechtsgekrümmt]

$$\vec{f}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

$$\dot{\vec{f}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix}$$

$$\ddot{\vec{f}}(t) = \begin{pmatrix} \ddot{x}(t) \\ \ddot{y}(t) \end{pmatrix}$$

„Krümmungsformel"

$$k(t) = \frac{\dot{x}(t) \cdot \ddot{y}(t) - \dot{y}(t) \cdot \ddot{x}(t)}{\left[\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

1. Beispiel) Krümmung des Kreises mit $r \in \mathbb{R}$

$$\vec{f}(t) = \begin{pmatrix} r\cos t \\ r\sin t \end{pmatrix}$$

$$x(t) = r\cos t \qquad y(t) = r\sin t$$

$$\dot{x}(t) = -r\sin t \qquad \dot{y}(t) = r\cos t$$

$$\ddot{x}(t) = r\cos t \qquad \ddot{y}(t) = -r\sin t$$

$$\underline{\underline{k(t)}} = \frac{(-r\sin t)(-r\sin t) - r\cos t \cdot r\cos t}{\left[(-r\sin t)^2 + (r\cos t)^2\right]^{3/2}}$$

$$= \frac{r^2(1)}{\left[r^2 \cdot 1\right]^{3/2}} = \frac{r^2}{r^{2\cdot\frac{3}{2}}} = \frac{r^2}{r^3} = \underline{\underline{\frac{1}{r}}}$$

Die „jenigste" Parabel

$$\vec{l}(t) = \begin{pmatrix} t^2 - 2t \\ t^2 - t + 1 \end{pmatrix}$$

$$x(t) = t^2 - 2t$$

$$\dot{x}(t) = 2t - 2$$

$$\ddot{x}(t) = 2$$

$$y(t) = t^2 - t + 1$$

$$\dot{y}(t) = 2t - 1$$

$$\ddot{y}(t) = 2$$

$$k(t) = \frac{(2t-2)2 - (2t-1)\cdot 2}{\left[(2t-2)^2 + (2t-1)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{4t - 4 - 4t + 2}{\left(4t^2 - 8t + 4 + 4t^2 - 4t + 1\right)^{3/2}}$$

$$= \frac{-2}{\left[8t^2 - 12t + 5\right]^{3/2}} < 0$$

Krümmungskreis

- ohne Gleichungen
- ohne Formel

Veranschaulichung, Erklärung mithilfe von GEOGEBRA

Alle Unterlagen als kostenlose pdf-Datei unter
www.raphael-birr.ch

Anregungen? Vorschläge?
Schickt mir 'ne Mail