Höhere Mathematik für Studienanfänger, Nebenfächler usw

$\boxed{\text{Aussagen}}$

Video $\underline{1}$

Aussagen / Aussagenlogik

Eine „Aussage" ist ein Satz, der eindeutig(!) wahr (w) oder falsch (f) sein kann.

→ $1+1=0$

→ Jede Gerade enthält unendlich viele Punkte.

→ Cerz ist geil.

Aussagen können mit $A, B, \ldots$ oder $a, b, \ldots$ bezeichnet werden.

Wichtige Zeichen

A: 3 ist eine Primzahl

$\neg A$: 3 ist keine Primzahl.

B: 2 ist gerade.

$A \vee B$: 3 ist Primzahl oder (!) 2 ist gerade

$A \wedge B$: 3 ist Primzahl und (!) 2 ist gerade

$C \Rightarrow D$: Aus C folgt D

$E \Leftrightarrow F$: E ist äquivalent zu F

(bedeutet $E \Rightarrow F \land F \Rightarrow E$)

$\boxed{\text{Wahrheits„tabelle"}}$

A sei eine Aussage.
B sei eine Aussage.

$\neg A$

A	$\neg A$
w	f
f	w

A	B	$A \lor B$
w	w	w
f	f	f
w	f	w
f	w	w

A	B	$A \wedge B$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	f

Die „De Morganschen Regeln"

$$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$$

↑!!!

$$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$$

↑
!!!

Dann sollte man noch kennen

„$\forall$" bedeutet: <u>für alle</u>

„$\exists$" bedeutet: <u>es gibt ein</u>

„$\exists!$" bedeutet: es gibt <u>genau</u> ein

3

Aufgabe

(1) Beweise, daß folgende Aussagen immer wahr sind:

(a) $(A \wedge B) \Leftrightarrow (B \wedge A)$

(b) $(A \vee B) \Leftrightarrow (B \vee A)$

($1 \triangleq w$, $0 \triangleq f$)

Zu a

A	B	$A \wedge B$	$B \wedge A$
1	1	w	w
1	0	f	f
0	1	f	f
0	0	f	f

nach den def. Wahrheitstab.

stimmen überein!

Zub

A	B		$A \vee B$	$B \vee A$
w	w		w	w
w	f		w	w
f	w		w	w
f	f		f	f

stimmen überein

Ausblick Regeln

5

Höhere

Mathematik

für

Studienanfänger,

Nebenfächler usw

$\boxed{\text{Mengen}}$

Video 2

Mengen

– und was dazugehört

Eine **Menge** ist eine Zusammenfassung „gut unterscheidbarer" Objekte.

$$M = \{ x \mid x \text{ besitzt die Eigenschaft(en) } E_i \}$$

also

$$M_1 = \{ n \mid n \in \mathbb{N} \}$$

$$M_2 = \{ z \mid z \in \mathbb{Z} \wedge z \text{ ist teilbar durch } 2 \}$$

$$M_3 = \{ p \mid p \text{ ist Primzahl} \}$$

$$M_4 = \{ \ \}$$

$$M_5 = \{ 1; 2; 3 \}$$

$a \in M$ bedeutet „a ist Element von M"

$a \notin M$ „a ist kein Element von M"

$A \subset B$ bedeutet: A ist echte Teilmenge von B

$A \subseteq B$ bedeutet: A ist Teilmenge oder gleich B

$A \not\subset B$ „A ist nicht Teilmenge von B"

$A = B$ A gleich B

<u>Beispiel:</u>

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

Mengenoperationen

M_1 und M_2 seien beliebige Mengen

$$M_1 \cap M_2 = \{x \mid x \in M_1 \wedge x \in M_2$$

und (gleichzeitig)

„Durchschnitt"

$$M_1 \cup M_2 = \{x \mid x \in M_1 \vee x \in M_2$$

oder

„Vereinigung"

$$M_1 \setminus M_2 = \{x \mid x \in M_1 \wedge x \notin M_2\}$$

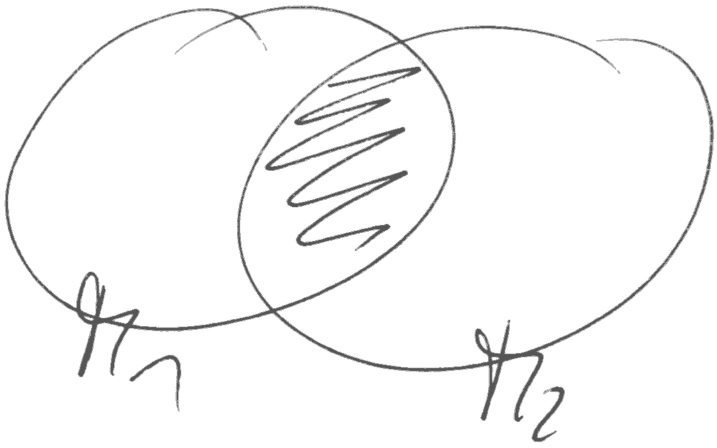
„Differenz"

Gilt $A \cap B = \emptyset$ bzw $A \cap B = \{\}$, so nennt man A und B

<u>disjunkt.</u>

3

$\mathfrak{A}_1 \cap \mathfrak{A}_2$

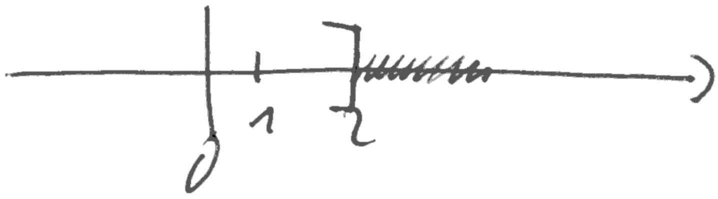


$\mathfrak{A}_1 \cup \mathfrak{A}_2$

$\mathfrak{A}_1 \setminus \mathfrak{A}_2$

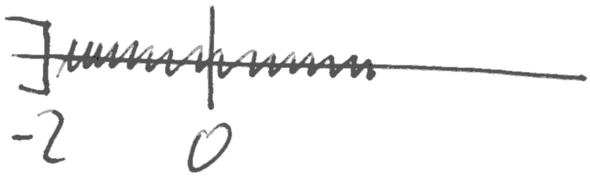
Zahlenbeispiele

$Z_1 := \{x \mid x > 2\}$



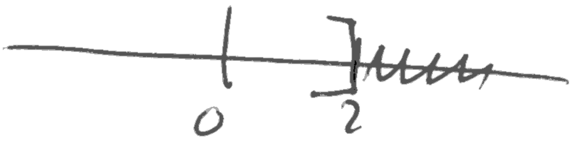
„sei definiert als"

$Z_2 := \{x \mid x > -2\}$



$$Z_1 \cup Z_2 = \{x \mid x > 2 \underset{\text{oder}}{\vee} x > -2\}$$

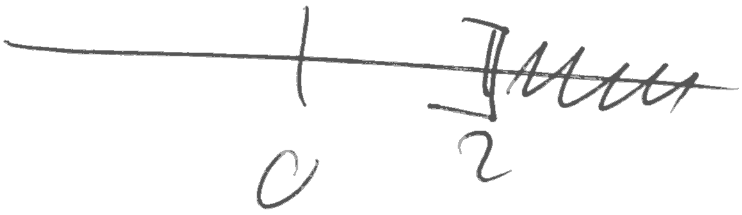
$$\overset{!}{=} \{x \mid x > -2\}$$

$Z_1 := \{x \mid x > 2\}$ 

$Z_2 := \{x \mid x > -2\}$ 

$$Z_1 \cap Z_2 = \{x \mid x > 2 \underset{\text{und gleichzeitig}}{\wedge} x > -2\}$$

$$\overset{!}{=} \{x \mid x > 2\}$$

$Z_1 := \{x \mid x > 2\}$ 

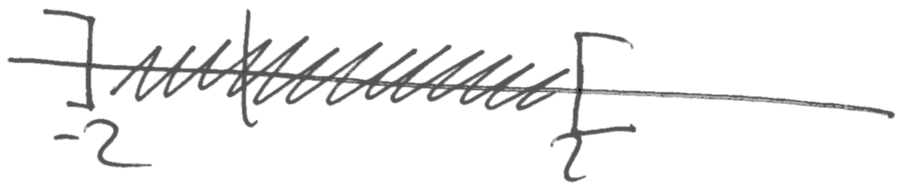
$Z_2 := \{x \mid x > -2\}$ 

$Z_1 \setminus Z_2 = \{x \mid x \in Z_1 \wedge x \notin Z_2\}$

$= \{\ \} = \emptyset$

$Z_2 \setminus Z_1 = \{x \mid x \notin Z_1 \wedge x \in Z_2\}$

$= \{x \mid x > -2 \wedge x < +2\}$

$\hat{=}$ 

Ausblick

reelle Zahlen

7

Das kartesische Produkt

Wenn A, B zwei beliebige Mengen sind, dann erhält man unter

$$A \times B = \{ (x,y) \mid x \in A, y \in B \}$$

„A kreuz B"

geordnete!! Paare

Und die Erweiterung:
$A_1, A_2, A_3, \dots A_n$ seien Mengen

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_i \times \dots \times A_n$$
$$= \{ (x_1, x_2, \dots, x_i, \dots x_n) \mid x_i \in A_i \}$$

und

$$A^n := \underbrace{A \times A \times \dots \times A}_{n \text{ mal}}$$

z.B. $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

8

Ist M eine nicht leere Teil Menge, so versteht man unter der

Potenzmenge von M $P(M)$

die Menge, die alle Teilmengen – incl der leeren Menge und der Menge selbst – von M enthält, also z.B.

$$M = \{a, b\}$$

$$P(M) = \{\emptyset, \{a, b\}; \{a\}; \{b\}\}$$

die leere Menge

die Menge selbst

Überblick

reelle Zahlen

Höhere

Mathematik

für

Studienanfänger,

Nebenfächler usw

$\boxed{\text{Reelle Zahlen}}$

Video 3

Reelle Zahlen

Die uns allen bekannten reellen Zahlen bilden mit der „üblichen" $\oplus$ und $\odot$ eine Struktur namens „KÖRPER"

Körper der rellen Zahlen

$$(\mathbb{R}, +, \cdot)$$

abelsche Gruppe

$\oplus$

→ Mit $a, b \in \mathbb{R}$ ist $a + b \in \mathbb{R}$

→ $a + (b + c) = (a + b) + c$ Assoz. gesetz

→ $a + b = b + a$ kommutat. ges.

→ $0 + a = a + 0 = a$ Es gibt ein „neutrales" Element

→ $a + (-a) = (-a) + a = 0$ „inverses Element"

abelsche Gruppe

$\odot$

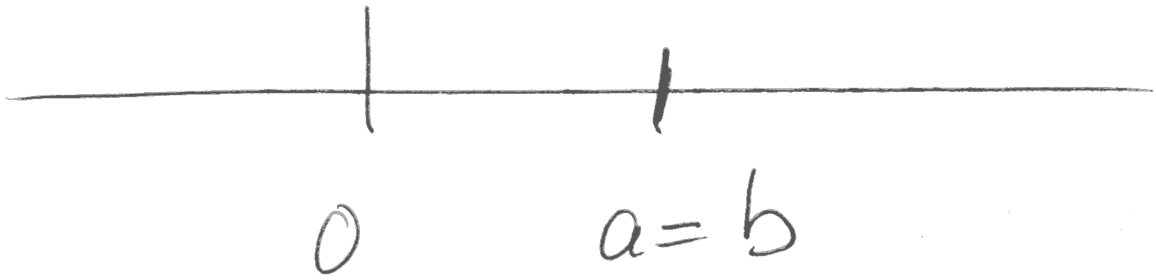
→ $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

→ $a \cdot b = b \cdot a$

→ $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$ s.o.

→ $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = \underline{1}$ s.o.

allg: $a \cdot (b + c) = ab + ac$



Dann gibt es noch

$\boxed{a \le b}$ a ist kleiner <u>oder</u> gleich b

z.B. $3 \le 3$

$\boxed{a \ge b}$ a ist größer <u>oder</u> gleich b

$7 \ge 7$

Und man merke sich

Betrag von a: $|a|$

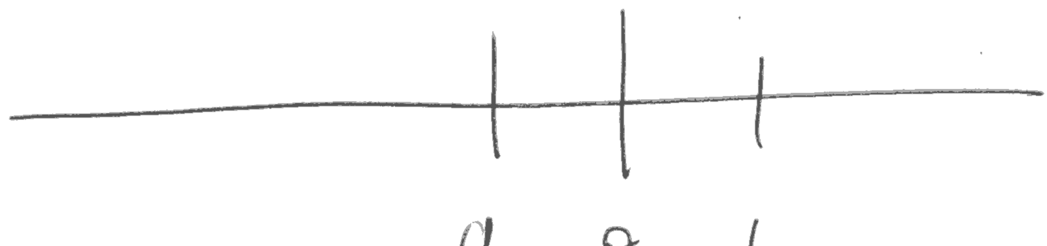
$$|a| = \begin{cases} +a & \text{falls } a > 0 \\ 0 & \text{falls } a = 0 \\ -a & \text{falls } a < 0 \end{cases}$$

Abel, Nils Henrik, Däne 1802 – 1829

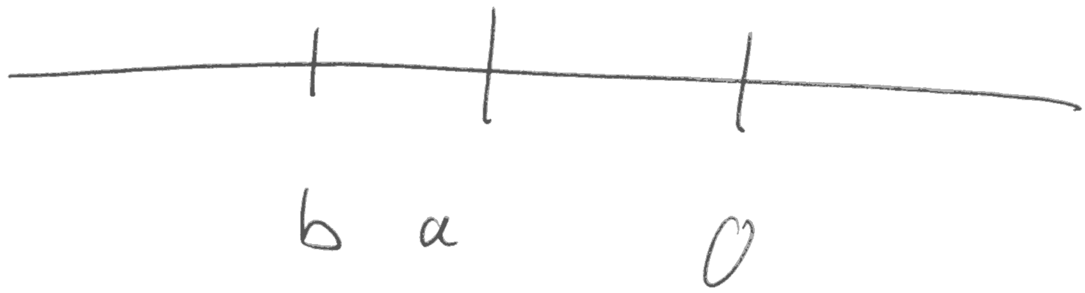
Bemerkung: Läßt man die Kommutativität bzg $\odot$ weg, nennt man die Struktur „Schiefkörper" oder „Divisionsring".

Anordnung

Alle reellen Zahlen sind „angeordnet".



$a < b$



$a > b$

also

$|3| = 3$ weil $3 > 0$

$|-7| = -(-7) = +7$ weil $-7 < 0$

$|0| = 0$

oder etwas komplizierter

$$|a+b| = \begin{cases} +(a+b) & \text{falls } (a+b) > 0 \\ 0 & \text{falls } (a+b) = 0 \\ -(a+b) & \text{falls } (a+b) < 0 \end{cases}$$

Bezgl. des Betrages gibt es viele Folgerungen, Beziehungen usw, z. B.

$\rightarrow \quad |a| = b \wedge b > 0 \Rightarrow (a = b) \vee -a = b$

$\rightarrow \quad |a-b| \geq |a| - |b|$

$\rightarrow \quad |a+b| \geq |a| - |b|$

Ziemlich oft in der Mathematik taucht die sog. „Dreiecksungleichung" auf:

$$|a+b| \leq |a| + |b|$$

Den kz. Beweis sollte man – ausnahmsweise – „auswendig" können:

$\forall a,b \in \mathbb{R}$ gilt $|a+b| \leq |a| + |b|$

<u>Beweis</u>

<u>1. Fall</u> $a+b \geq 0$

Dann ist

$$|a+b| = a+b \leq |a| + b \leq |a| + |b|$$

weil $|a| \geq a$, $|b| \geq b$ $\forall a,b \in \mathbb{R}$

<u>2. Fall</u> $a+b < 0$

Dann ist

$$\begin{aligned} |a+b| &= -(a+b) \\ &= (-a) + (-b) \\ &\leq |a| + |b| \end{aligned}$$

weil $|a| \geq -a$, $|b| \geq -b$ $\forall a,b \in \mathbb{R}$

6

An dieser Stelle sollte man sich noch die Schreibweisen für Intervalle merken:

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$$

„abgeschlossenes Intervall" z.B. $[0;1]$

$$\left.\begin{array}{c} [a, b[\\ \text{oder} \\ [a, b) \end{array}\right\} = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$$

„halboffenes Intervall"

links analog

$$\left.\begin{array}{c}]a;b[\\ \text{od.} \\ (a,b) \end{array}\right\} = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$

„offenes Intervall"

Mit diese Schreibweise gilt z.B

① $\mathbb{R}^+ =]0;+\infty[\stackrel{!}{=} (0,+\infty)$

$= \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < +\infty\}$

② $\mathbb{R}^- =]-\infty;0[\stackrel{!}{=} (-\infty,0)$

$= \{x \in \mathbb{R} \mid -\infty < x < 0\}$

③ $\mathbb{R} =]-\infty,+\infty[\stackrel{!}{=} (-\infty,+\infty)$ (8)

$= \{x \in \mathbb{R} \mid -\infty < x < +\infty[$

Es folgen

Ausgewählte Aufgaben mit ausführlichen klaren Lösungen zu den Themen:

→ Aussagenlogik

→ Mengen

→ reelle Zahlen

www.raphael-bühr.de