# Trigonometrische Gleichungen

## TYP 1

$$\sin(2x+1) = 0{,}3$$

$$\left[ \begin{matrix} \sin \\ \cos \\ \tan \end{matrix} (ax+b) = c \right] \text{ allg}$$

<u>Substitution</u> $2x+1 = z$

$$\sin(z) = 0{,}3$$

<u>TR:</u> $\underline{z_1 = 0{,}305}$

<u>2. Lösung</u> $z_2 = \pi - 0{,}305 = 2{,}837$

<u>alle Lösungen</u>

$$z_1 = 0{,}305 + k \cdot (2\pi) \quad k \in \mathbb{Z}$$
$$z_2 = 2{,}837 + k \cdot (2\pi)$$

<u>Rücksubstitution</u>

<u>$z_1$:</u>

$$2x_1 + 1 = z_1$$
$$2x_1 + 1 = 0{,}305 + k \cdot (2\pi)$$
$$2x_1 = -0{,}695 + k \cdot 2\pi$$
$$x_1 = -0{,}3975 + k \cdot \pi$$

$z_2$: $2x_2 + 1 = z_2$

$$2x_2 + 1 = 2{,}837 + k(2\pi) \quad | -1$$

$$2x_2 = 1{,}837 + k(2\pi) \quad | :2$$

$$\underline{\underline{x_2 = 0{,}9185 + k \cdot \pi}}$$

TYP 2

$$\sin(2x) = 3\cos(2x)$$

$$\left[\ c \cdot \sin(ax+b) = d \cdot \cos(ax+b)\ \right] \text{ allg}$$

Wir dividieren

$$\sin(2x) = 3 \cdot \cos(2x) \quad | : \cos 2x$$

$$\frac{\sin(2x)}{\cos(2x)} = 3$$

$$\tan(2x) = 3 \quad [\text{wie Typ 1}]$$

Substitution $2x = z$

$$\tan(x) = 3$$

TR $\cancel{z} = 1{,}249$

$$z_1 = 1{,}245 + k \cdot \pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

Rücksubstitution

$$2x_1 = z_1$$

$$x_1 = \frac{1}{2} z_1$$

$$x_1 = \frac{1}{2}(1{,}245 + k \cdot \pi)$$

$$x_1 = 0{,}6245 + \frac{k}{2} \cdot \pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

3

Typ 3 $\quad \sin(2x+1) + \sin(3x-2) = 0$

$$\left[ \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}(ax+b) + \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}(cx+d) = 0 \right] \text{allg.}$$

Strategie: Anwendung der
→ Additionstheoreme

→ Ein Produkt ist Null:
Untersuchung der
Faktoren

Additionssatz für obiges Beispiel:

$$\underbrace{\sin(\alpha) + \sin(\beta)}_{\text{obige Summe}} \underset{!}{=} \underbrace{2 \cdot \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}_{\text{Produkt!!}}$$

$$\sin(\underbrace{2x+1}_{\alpha}) + \sin(\underbrace{3x-2}_{\beta}) = 0$$

$$\cdot \sin\underbrace{\left(\frac{(2x+1)+(3x-2)}{2}\right)}_{\frac{\alpha+\beta}{2}} \cdot \cos\underbrace{\left(\frac{(2x+1)-(3x-2)}{2}\right)}_{\frac{\alpha-\beta}{2}} = 0$$

$$\boxed{\cdot \sin\left(\frac{5x-1}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{-x+3}{2}\right) = 0}$$

I $\sin\left(\frac{5x-1}{2}\right) = 0$

Die Nullstellen von „sin" liegen bei $k \cdot \pi$, $k \in \mathbb{Z}$

$$\frac{5x-1}{2} = k \cdot \pi$$

$$\Leftrightarrow 5x - 1 = 2k \cdot \pi$$

$$\Rightarrow \boxed{x = \frac{2k\pi + 1}{5}}$$

II $\cos\left(\frac{-x+3}{2}\right) = 0$

Die Nullstellen von „cos" liegen bei $\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$ $k \in \mathbb{Z}$

$$\sin(\underbrace{2x+1}_{\alpha}) + \sin(\underbrace{3x-2}_{\beta}) = 0$$

$$\Rightarrow 2 \cdot \sin\underbrace{\left(\frac{(2x+1)+(3x-2)}{2}\right)}_{\frac{\alpha+\beta}{2}} \cdot \cos\underbrace{\left(\frac{(2x+1)-(3x-2)}{2}\right)}_{\frac{\alpha-\beta}{2}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{2 \cdot \sin\left(\frac{5x-1}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{-x+3}{2}\right) = 0}$$

**1. Fall** $\sin\left(\frac{5x-1}{2}\right) = 0$

Die Nullstellen von „sin" liegen bei $k\cdot\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

$$\frac{5x-1}{2} = k\cdot\pi$$

$$\Leftrightarrow 5x-1 = 2k\cdot\pi$$

$$\Rightarrow \boxed{x = \frac{2k\pi+1}{5}}$$

**2. Fall** $\cos\left(\frac{-x+3}{2}\right) = 0$

Die Nullstellen von „cos" liegen bei $\frac{\pi}{2} + k\cdot\pi$ $k \in \mathbb{Z}$

Also $\frac{-x+3}{2} = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \qquad k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow \quad -x+3 = \pi + 2k\pi$

$\Leftrightarrow \quad -x = \pi + 2k\pi - 3$

$\Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x}} = -\pi - 2k\pi + 3$

$\underline{\underline{= 3 - (1+2k) \cdot \pi}}$

$\underline{\underline{\mathbb{L}_G = \left\{ x \;\middle|\; x = \frac{2k\pi + 1}{5} \text{ oder } x = 3 - (1+2k)\pi,\ k \in \mathbb{Z} \right\}}}$

TYP 4 Bestimme die Lösungen von

$$2\sin^2(x) - \sin(x) = 1 \text{ auf } [0;2\pi]$$

→ nur "eine" Funktion, aber die ist quadratisch

→ eingeschränkter Definitionsbereich!

Wir substituieren

$$\boxed{z = \sin(x)}$$

$$2z^2 - z = 1 \quad | :2$$

$$z^2 - \frac{1}{2}z = \frac{1}{2} \quad | \text{ p-q-Formel}$$

$$z_{1/2} = \frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{9}{16}}$$

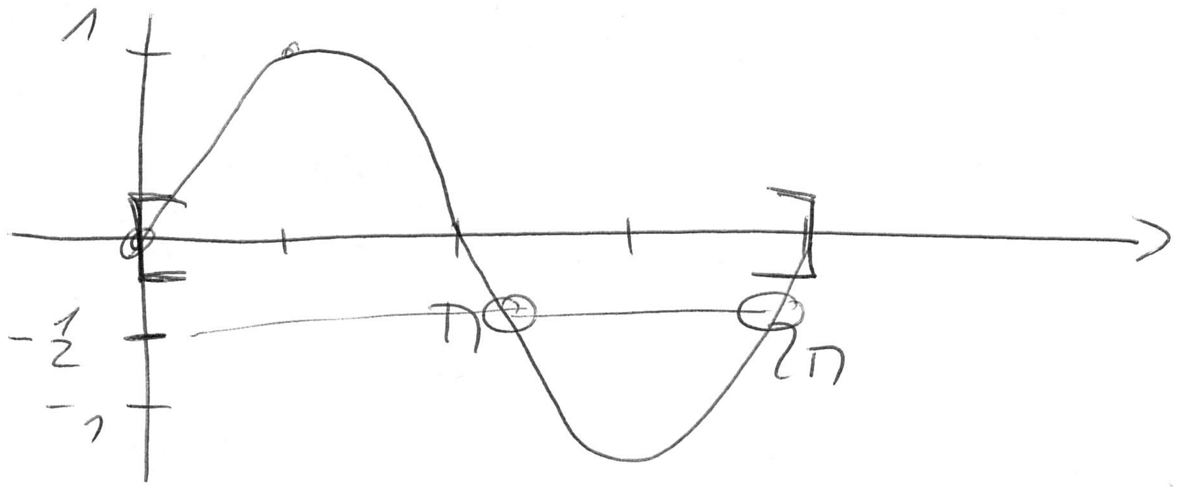
$$= \frac{1}{4} \pm \frac{3}{4} \qquad \underline{\underline{z_1 = 1}} \quad z_2 = -\frac{1}{2}$$

7

Rücksubstitution unter Beachtung des Bereiches $[0; 2\pi]$:

$$\sin(x_1) = z_1$$

$$\underline{\underline{\sin(x_1) = 1}}$$




$$(\sin x_1) = 1 \Leftrightarrow \underline{\underline{x_1 = \frac{\pi}{2}}}$$

$$\sin(x_2) = z_2$$

$$\Rightarrow \sin(x_2) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \underline{\underline{x_2 = \frac{7}{6}\pi}} \text{ oder}$$

$$\underline{\underline{x_3 = \frac{11}{6}\pi}}$$

$$\mathbb{L}_G = \left\{\frac{1}{2}\pi; \frac{7}{6}\pi; \frac{11}{6}\pi\right\}$$

8

## TYP 5: $3\sin(x) - 2\cos(x) + 3 = 0$

$D(G) = [0; 2\pi]$

Typ $\left[\ a\sin(\underbrace{bx+c}) + d\cos(\underbrace{ex+f}) + g = 0\ \right]$

Grobe Linie → auflösen nach sin/cos

→ Quadrieren

→ $\cos^2 \stackrel{\wedge}{=} 1 - \sin^2$ oder

$\sin^2 \stackrel{\wedge}{=} 1 - \cos^2$

– PROBE WEGEN QUADRATUR ERFORDERLICH!

$D(G) = [0; 2\pi]$

$$3\sin(x) - 2\cos(x) + 3 = 0 \quad | +2\cos x$$

$$3\sin x + 3 = 2\cos x \quad | \ (\ )^2$$

$$\underbrace{(3\sin x + 3)^2}_{\text{1. BIFO!}} = 4\cos^2 x$$

$$9\sin^2 x + 18\sin x + 9 = 4\cos^2 x \quad | \cos^2 \hat{=} 1 - \sin^2$$

$$9\sin^2 x + 18\sin x + 9 = 4(1 - \sin^2 x)$$

$$9\sin^2 x + 18\sin x + 9 = 4 - 4\sin^2 x$$

(jetzt wie Typ 4, aber mit Probe!)

$$13\sin^2 x + 18\sin x + 5 = 0 \qquad \sin x = z$$

$$13z^2 + 18z + 5 = 0 \quad | :13$$

$$z^2 + \frac{18}{13}z + \frac{5}{13} = 0 \quad | \ p\text{-}q\text{-Formel}$$

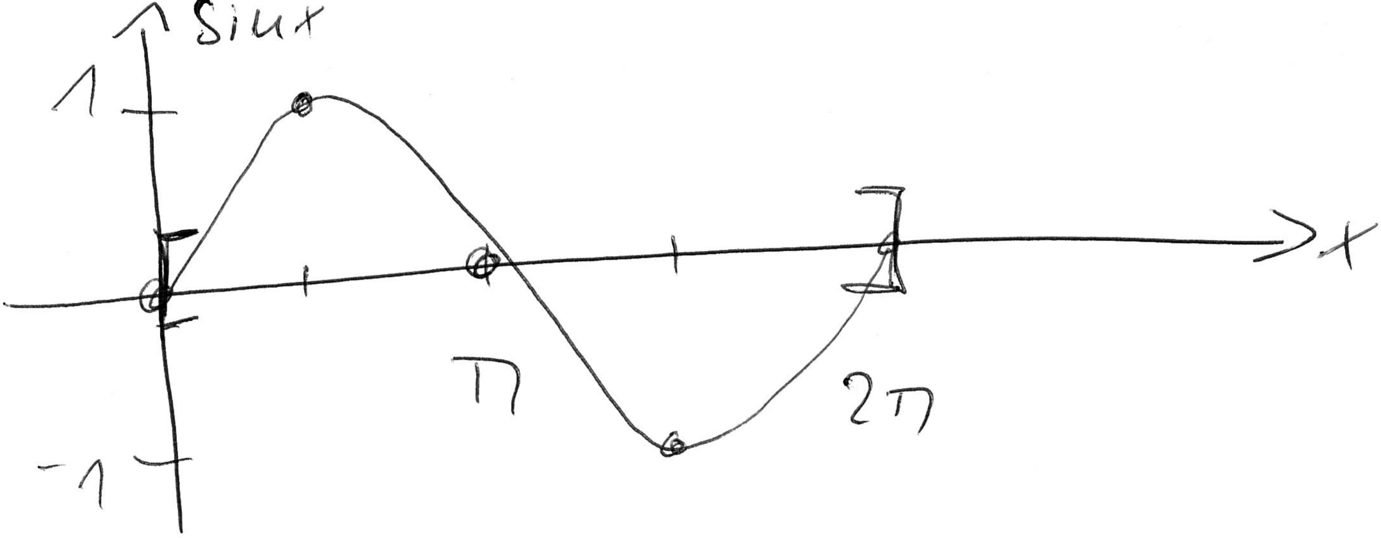
$$z_{1,2} = -\frac{9}{13} \pm \sqrt{\frac{81}{169} - \frac{5 \cdot 13}{169}}$$

$$= -\frac{9}{13} \pm \frac{1}{13}\sqrt{16}$$

$$= -\frac{9}{13} \pm \frac{4}{13}$$

$$\sin(x_1) = -\frac{5}{13} \qquad \sin(x_2) = -\frac{13}{13} = -1 \qquad D(G) = [0; 2\pi]$$

10




$\sin(x_1) = -\frac{5}{13}$ $\quad$ $\sin(x_2) = -1$

<u>1. Fall)</u> $\sin(x_1) = -\frac{5}{13}$

$$\cos^2(x_1) = 1 - \sin^2(x_1)$$
$$= 1 - \frac{25}{169}$$

also $\cos_1(x_1) = +\sqrt{\frac{144}{169}} = \frac{12}{13}$

$$\cos_2(x_1) = -\sqrt{\frac{144}{169}} = -\frac{12}{13}$$

<u>Glchg</u>: $3 \cdot \left(-\frac{5}{13}\right) - 2 \cdot \frac{12}{13} + 3 = 0$ ✓

$3 \cdot \left(-\frac{5}{13}\right) - 2\left(-\frac{12}{13}\right) + 3 = 0$ nein!!

## 2. Fall

$$\sin(x_2) = -1$$

$$\cos^2(x_2) = 1 - \sin^2(x_2)$$
$$= 1 - 1$$
$$= 0$$

$$3 \cdot (-1) - 2 \cdot 0 + 3 = 0 \checkmark$$
$$3 \cdot (-1) - 2 \cdot 0 + 3 = 0 \checkmark$$

## Zusammenfassung

$\sin(x) = -\frac{5}{13}$ $\cos x = \frac{12}{13}$ „passt“

$\sin(x) = -1$ $\cos x = 0$ „passt“

Für $\sin(x) = -\frac{5}{13}$ liefert der TR: $x \approx -0{,}395$

Dann ist $\cos(-0{,}395) > 0$ also ist

$x_1 = -0{,}395$ eine Lösung,

die leider nicht in $[0;2\pi]$ liegt;

Daher rechnen wir $2\pi + (-0{,}395) = 5{,}888$

$\sin x = -1$ hat die Lösung $x = \frac{3}{2}\pi$

und $\cos\left(\frac{3}{2}\pi\right) = 0$

$$\mathbb{L}_G = \left\{5{,}888;\ \frac{3}{2}\pi\right\}$$

## TYP 6

Löse $2\sin x - \tan x = 0$ auf $[0;2\pi]$

Strategie: Wir ersetzen $\tan = \frac{\sin}{\cos}$, beseitigen den Bruch

[redacted]

$$2\sin x - \tan x = 0 \quad \Big| \tan = \frac{\sin}{\cos}$$

$$2\sin x - \frac{\sin x}{\cos x} = 0 \quad \Big| \cdot \cos x$$

$$2\sin x \cos x - \sin x = 0$$

$$\underbrace{\sin x \left[2\cos x - 1\right] = 0}_{\text{Produkt ist Null!!}}$$

$$\sin x \cdot \left[ 2\cos x - 1 \right] = 0$$

$$DG = [0; 2\pi]$$

1. Fall $\quad \sin(x) = 0 \iff x_1 = 0$

$$x_2 = \pi$$

$$x_3 = 2\pi$$

2. Fall

$$2\cos x - 1 = 0 \quad | +1$$

$$2\cos x = 1 \quad | :2$$

$$\cos x = \frac{1}{2}$$

$$x_1 = \frac{1}{3}\pi \quad x_2 = \frac{5}{3}\pi$$

$$\mathbb{L} = \left\{ 0; \frac{1}{3}\pi; \pi; \frac{5}{3}\pi; 2\pi \right\}$$

15

# Ausblick

Was macht man bei

$$\underbrace{x^2 \cdot \sin(2x-4)}_{f_1(x)} \overset{?}{=} \underbrace{x+\cos(x^2)}_{f_2(x)}$$

auf $[0;2\pi]$

per GEOGEBRA