Höhere Mathematik für Studienanfänger, Nebenfächler usw

$\boxed{\text{Video 13}}$

Grenzwerte von Funktionen

+

Stetigkeit

Unterlagen als kostenfreies pdf unter

www.raphael-bore.de

Inhaltsverzeichnis

→ Grenzwert $x \to x_0$
über „Zahlenfolge"

→ Grenzwert $x \to x_0$
über „ε-δ-Kriterium"

→ uneigentliche Grenzwerte

→ Beispiele

→ Grenzwertsätze mit
„Einschließungen"

→ Stetigkeit, Sprungstelle,
hebbare Lücke, Pol

→ Beispiele

→ Wichtige Sätze, Ausblick

Grenzwert $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$

Variante 1: mit Zahlenfolgen

$f(x)$ sei auf $U(x_0)$ erklärt. Wenn nun für jede Zahlenfolge (x_n) die zugehörige „Funktionswertzahlenfolge" $(f(x_n))$ gegen g konvergiert, so heißt g Grenzwert von f für $x \to x_0$ oder kurz

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = g$$

Für (x_n) muß gelten:

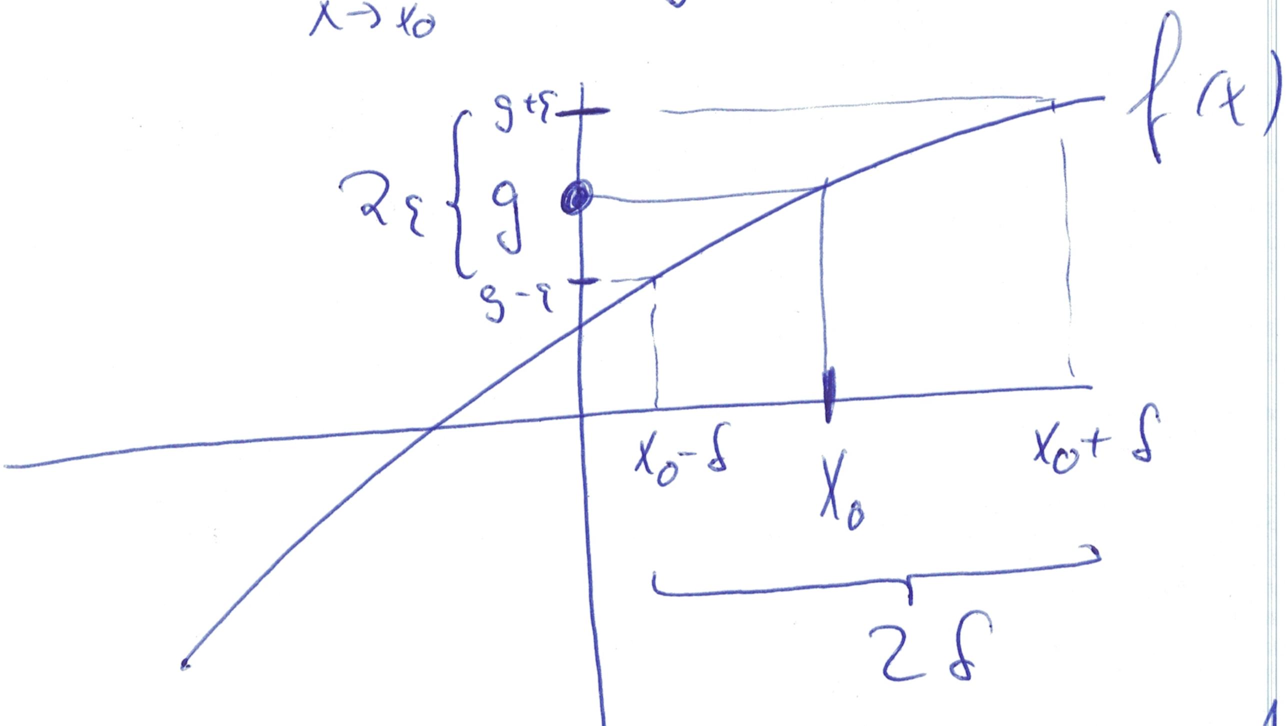
$\longrightarrow$ $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$

$\longrightarrow$ $(x_n) \in U(x_0)$

Variante 2: Die „ε-δ-Definition"

f sei in $U(x_0)$ erklärt.

Wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ~~ein δ(ε~~
mit $|f(x_n) - g| < \varepsilon$ ein $\delta(\varepsilon)$ gibt,
so daß $0 < |x_n - x_0| < \delta$ ist,
dann ist g Grenzwert von f für $x \to x_0$
also $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = g$



umgangssprachlich: „Zu jedem noch so kleinen ε-Streifen lässt sich stets ein entsprechender δ-Streifen konstruieren

Bemerkungen – Beide Varianten sind „äquivalent"

– Ist es nicht egal, ob man sich „von links" oder „von rechts" dem x_0 nähert, so spricht man vom

Links-limes $\hat{=}\ l\text{-}\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$

$\hat{=}\ \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$

bzw. vom

Rechts-limes $\hat{=}\ r\text{-}\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$

$\hat{=}\ \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$

Beispiele

1. $f(x) = \frac{2x-4}{x-2}$

Wir betrachten natürlich $x_0 = 2$:

$f(x_0) = f(2)$ ist nicht (!) definiert

Sei nun $x_0 \neq 2$

$$f(x) = \frac{2x-4}{x-2} = \frac{2\cdot(x-2)}{x-2} \overset{!}{=} 2$$

also ist

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (2) = 2$$

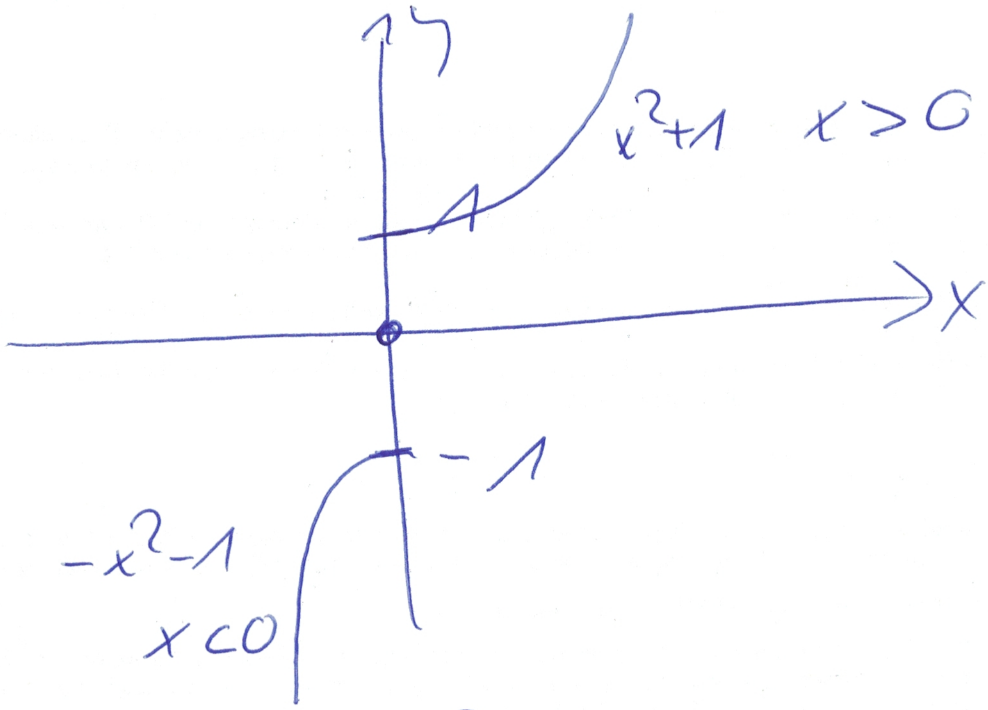
$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} (2) = 2$$

insgesamt ist

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2} f(x) = 2$$

4

2



$$f(x) = \begin{cases} x^2+1 & x>0 \\ 0 & x=0 \\ -x^2-1 & x<0 \end{cases}$$

Wir untersuchen die Grenzwerte an der Stelle $x_0 = 0$

Sei $x > 0$

$$r\text{-}\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (x^2+1) = \underline{\underline{1}}$$

$$l\text{-}\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (-x^2-1) = \underline{\underline{-1}}$$

5

Grenzwerte für $x \to \pm\infty$

Gilt für jede gegen Unendlich strebende Zahlenfolge (x_n): $\lim (f(x_n)) = g$, so heißt „g Grenzwert" von $f(x)$ für $x \to \pm\infty$!

Beispiel $f(x) = \frac{1}{x}$

Sei $(x_n) \longrightarrow \infty$, dann ist

$$\lim f(x_n) = \lim \frac{1}{(x_n)} = 0 \; [=g]$$

und

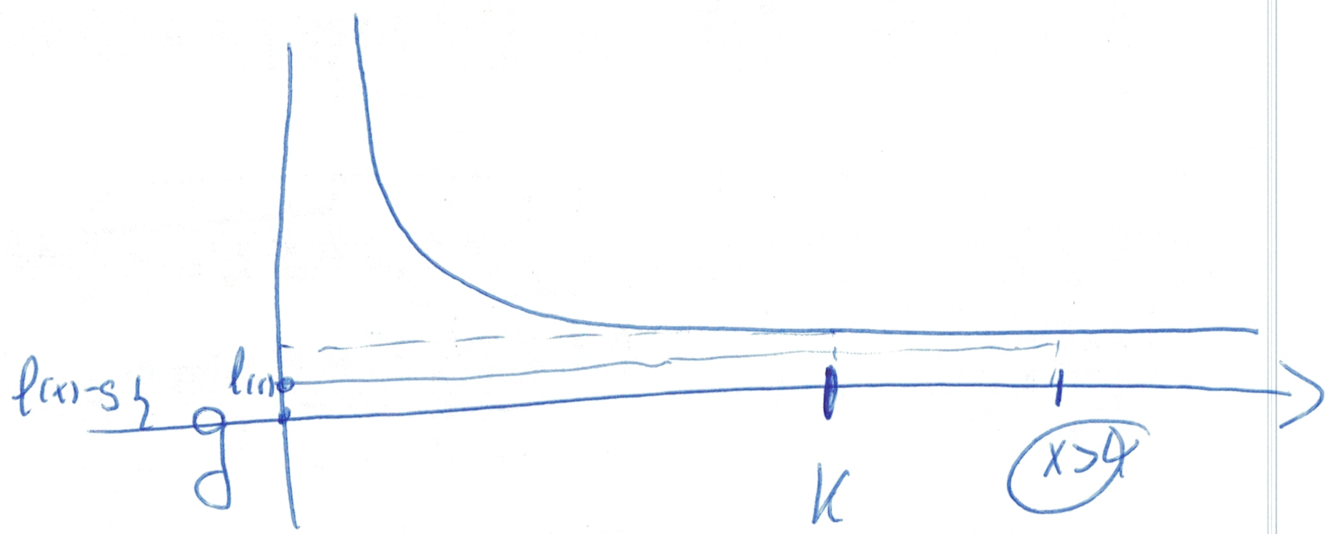
$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$$

alternativ:

Sei $f(x)$ auf $[a,\infty)$ erklärt.

Für $x \to \infty$ gilt genau dann $\lim_{x\to\infty} f(x) = g$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $K(\varepsilon) > 0$ gibt, so daß für jedes $x > K$

$$|f(x) - g| < \varepsilon \quad \text{ist!}$$



Beispiel $\quad f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1} \quad x \in [0,\infty)$

Behauptung $\quad \lim_{x\to\infty} f(x) = 1$

Wir fragen:

Wann ist $|f(x) - g| < \varepsilon$?

$\Longleftrightarrow$

$$\left| \frac{x^2-1}{x^2+1} - 1 \right| \overset{?}{<} \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{x^2-1}{x^2+1} - \frac{x^2+1}{x^2+1} \right| \overset{?}{<} \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{x^2-1-x^2-1}{x^2+1} \right| \overset{?}{<} \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{-2}{x^2+1} \right| \overset{?}{<} \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{x^2+1} < \varepsilon$$

$\Leftrightarrow |f(x) - 1| = \frac{2}{x^2+1} < \underline{\underline{\frac{2}{x^2} < \varepsilon}}$ wenn $x^2 > \frac{2}{\varepsilon}$ bzw

$x > \underbrace{\sqrt{\frac{2}{\varepsilon}}}_{=k}$ ist 8

Zusammenstellung

Rechenregeln für „lim"

① $\lim(f+g) = \lim f + \lim g$

② $\lim(f-g) = \lim f - \lim g$

③ $\lim(f \cdot g) = \lim f \cdot \lim g$

④ $\lim\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{\lim f}{\lim g}$

⑤ $\lim(c \cdot f) = c \cdot \lim f$

Empfehlung

$\rightarrow \lim \sqrt[n]{f} = \sqrt[n]{\lim f}$

$\rightarrow \lim (f)^n = (\lim f)^n$

Wer möchte?

$\rightarrow \lim a^f = a^{\lim f}$

$\rightarrow \lim(\log_a f) = \log_a(\lim f)$

mit den entspr. Voraussetzungen

STETIGKEIT

Man nehme „Variante 1" bzw. „Variante 2" und fordere, daß der Grenzwert $g = f(x_0)$ ist

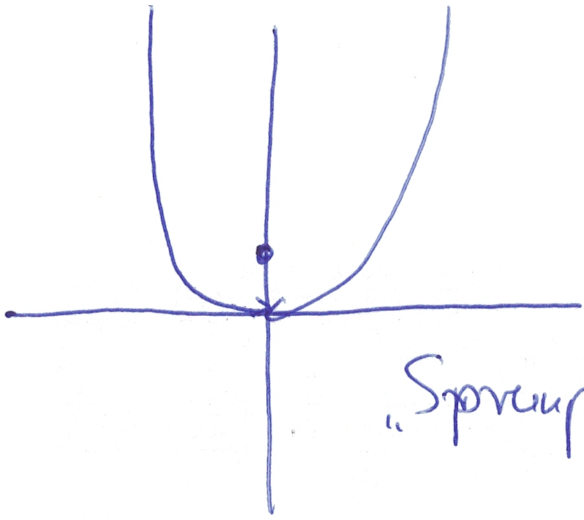
Variante 1 In Kurzform

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \overset{!}{=} f(x_0)$$

→ f heißt dann „stetig an der Stelle x_0"

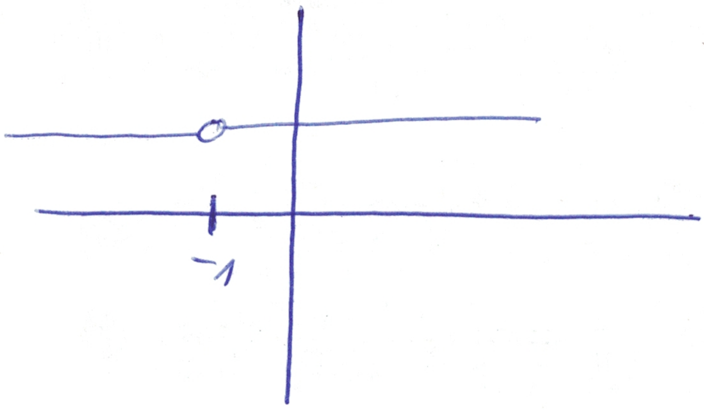
→ f heißt „stetig", wenn sie an jeder Stelle ihres Definitionsbereiches stetig ist

→ anschaulich: der Graph von f läßt sich „ohne abzusetzen" durchzeichnen



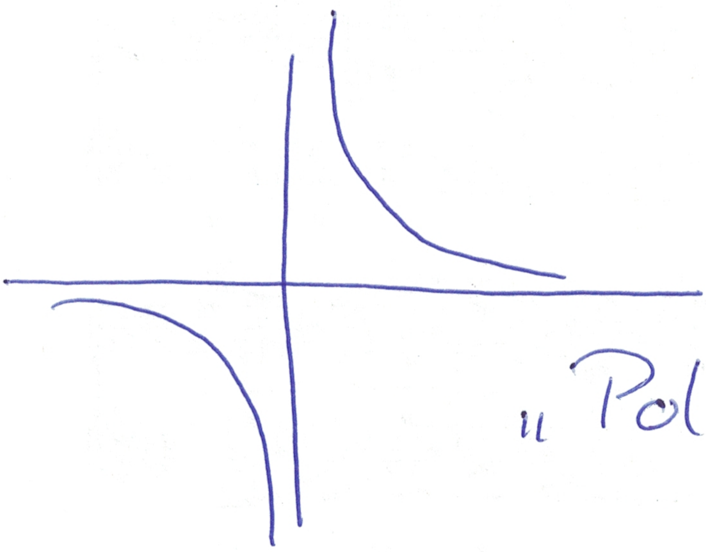
$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

„Sprungstelle“



$$f(x) = \frac{x+1}{x+1}$$

„hebbare“ Lücke



„Polstelle“

Beispiele

① $f(x)=x^2$ ist stetig an der Stelle $x_0=2$

Man untersucht

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) \stackrel{?}{=} f(x_0)$$

Sei (x_n) eine beliebige Zahlenfolge mit

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 2$$

Dann ist $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \left[(x_n)\right]^2$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[(x_n)\cdot(x_n)\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} (x_n) \cdot \lim_{n\to\infty} (x_n) = 2\cdot 2 = \underline{\underline{4}}$$

Weiter ist

$$f(x_0) = f(2) = 2^2 = \underline{\underline{4}}$$

$f(x)=x^2$ ist stetig bei $x_0=2$

Wichtige „Sätze" zum Thema
Stetigkeit
(Auszug)

① Jede auf $[a,b]$ stetige Funktion ist dort beschränkt.

② [Weierstraß]
Jede auf $[a,b]$ stetige Funktion nimmt dort ihren größten und kleinsten Wert an.

③ [Bolzano]***
Für jede auf $[a,b]$ stetige Funktion mit $f(a)\cdot f(b)<0$ gibt es ein ξ aus dem Inneren von $[a,b]$ mit $f(\xi)=0$.

<u>Folgerung</u> der sog. <u>Zwischenwertsatz</u>

Ausblick

Wichtige „Funktionen" und ihre (wichtigsten) Eigenschaften

www.raphael-birve.de