Höhere

Mathematik

für

Studienanfänger,

Nebenfächler usw

Video 12

$\boxed{\text{Funktionen}}$

Inhaltsübersicht

- Definition: Funktion
- D(f) und W(f), Sprechweisen
- Wertetabelle und Grafik mit GEOGEBRA
- Symmetrie, Nullstelle, Periodizität, Monotonie. Beispiele
- Funktionen und umkehrbar Relation

Zum Auswendiglernen:

Eine Vorschrift, die jedem Element $x \in D$ genau ein Element $y \in D$ zuordnet, heißt Funktion

$$f: \begin{array}{l} D \to W \\ x \to y \end{array} \quad \text{oder} \quad f(x) = y$$

Schreibweise

D oder D(f) „Definitionsbereich"

W oder W(f) „Wertebereich"

$y = f(x)$ „Funktionsgleichung"

$\cancel{f: \overset{D}{x} \to \overset{W}{f(x)}}$ Zu

x „abhängige Variable" „Argument"

y „unabhängige Variable" „Funktionswert"

D

(1)

$y = f(x)$ „explizite Darstellung"

d.h. nach x oder y aufgelöst

$F(x,y) = 0$ „implizite Darstellung"

<u>Beispiele</u>

$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f: x \to 2x$

oder $f(x) = \sin(x)$

oder $x^2 + y^2 - 1 = 0$

<u>Wertetabelle</u> $f(x) = x^2$

x	-2	-1	0	1	2	
y	4	1	0	1	2	usw

Grafik:

Geogebra mit Beispielen

Wichtige Eigenschaften

1) Symmetrie

y-Achsensymmetrie z. B. $f(x) = x^2$

$$\boxed{f(x) = f(-x)}$$

Nachweis $f(x) = x^2$

$f(-x) = (-x)^2 = x^2$

2) Nullstelle

Ist $\boxed{f(x_0) = 0}$, so besitzt der Graph von f an der Stelle x_0 eine Nullstelle

Beispiel $f(x) = x^2 - 5x + 6$

$$f(x) = 0 \Longleftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$$
$$\Longleftrightarrow (x-2)\cdot(x-3) = 0$$
$$\Longleftrightarrow \underline{\underline{x_1 = +2 \quad x_2 = +3}}$$

8) Periodizität

Eine Funktion $y = f(x)$ heißt

periodisch mit der Periode p,

falls $f(x) = f(x+p) \quad p \in D(f)$ gilt.

Beispiel $f(x) = \sin(x)$

Periode $p = 2\pi$, denn

$$f(x+p) = f(x+2\pi)$$
$$= \sin(x+2\pi)$$
$$= \sin(x)$$
$$= f(x)$$

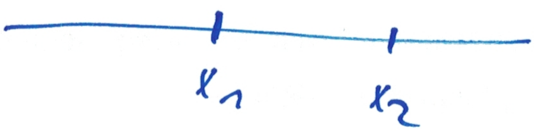
(4) Monotonie

Man unterscheidet

→ monoton steigend
→ monoton fallend
→ streng monoton steigend
→ streng monoton fallend

Festlegung

Es sei stets $x_1 < x_2$ $\quad x_i \in D(f)$

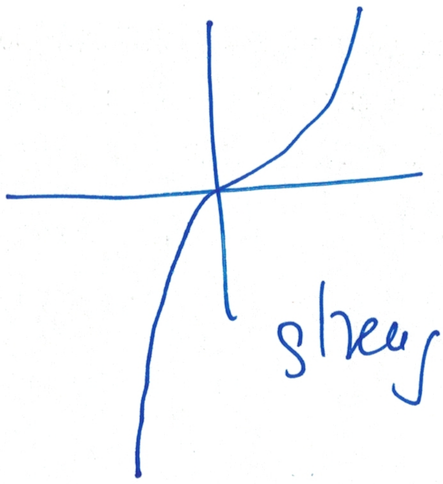


gilt dann

$f(x_1) \leq f(x_2)$: monoton steigend (wachsend)
$f(x_1) < f(x_2)$: streng " "
$f(x_1) \geq f(x_2)$: monoton fallend
$f(x_1) > f(x_2)$: streng " "

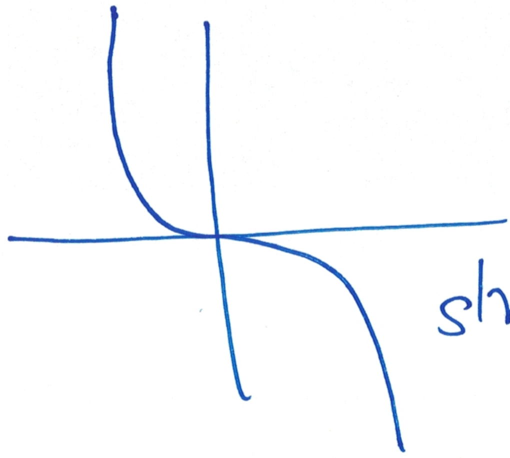
Beispiele

① $f(x) = x^3$



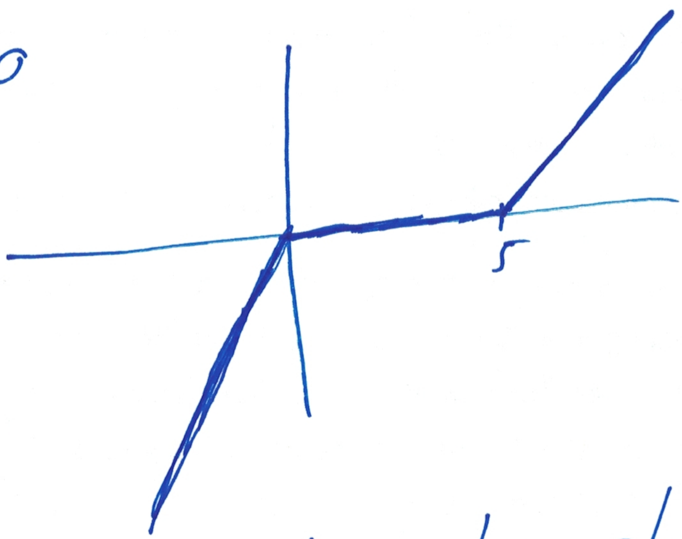
streng monoton steigend

② $f(x) = -x^3$



streng monoton fallend

③ $f(x) = \begin{cases} +x & x \leq 0 \\ 0 & 0 < x < 5 \\ x-5 & x > 5 \end{cases}$



monoton steigend

Umkehrfunktionen

Zu jeder streng monotonen Funktion bildet man die Umkehrfunktion so:

① Vertausche x und y

z.B. $y = 2x + 3 \rightarrow x = 2y + 3$

② Löse – wenn gewünscht – nach y hin auf

$$x = 2y + 3 \quad | -3$$
$$x - 3 = 2y \quad | :2$$
$$\underline{\underline{y = \frac{1}{2}x - 1.5}}$$

Umkehrfunktion

Es gilt

$D(f) \longrightarrow W(UF)$

$W(f) \longrightarrow D(UF)$

Geometrischer Aspekt

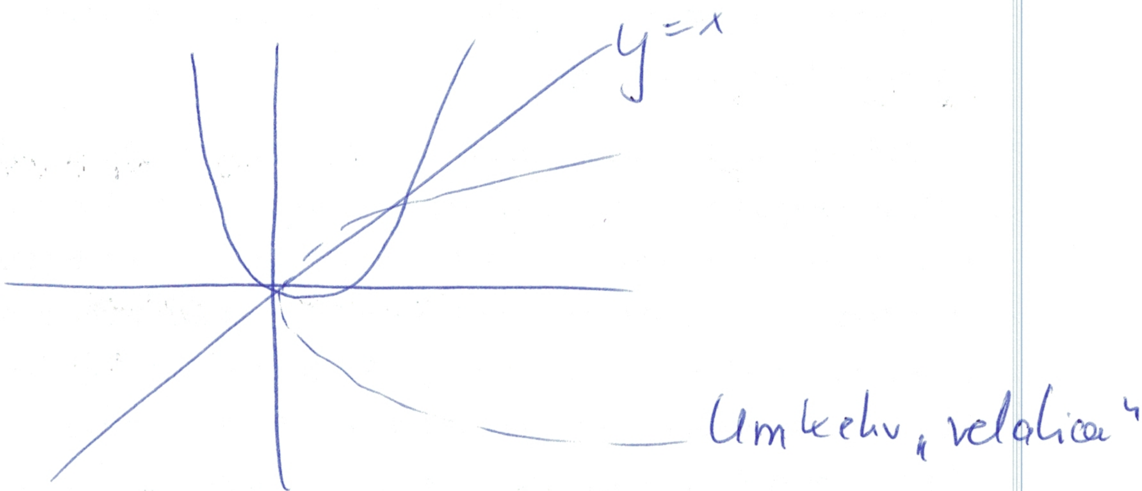
Der Graph der Funktion f wird an der Winkelhalbierenden $y=x$ gespiegelt

Beachte

(1) $y = x^2$ $\quad D(f) = \mathbb{R}$

$W(f) = \mathbb{R}^{\geq 0}$

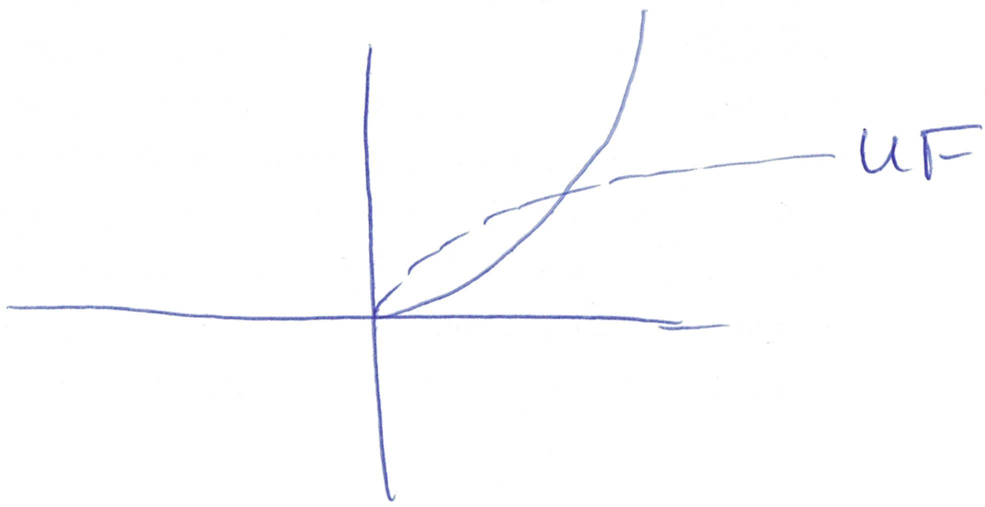
Der Graph ist nicht „streng monoton"



aber

$y = x^2$ $\quad D(f) = \mathbb{R}^{\geq 0}$!

$W(f) = \mathbb{R}^{\geq 0}$!



$$y = x^2 \xrightarrow{y=x} x = y^2 \quad | \sqrt{\ }$$

$$y = +\sqrt{x}$$

$$D(f) = \mathbb{R}^{\geq 0} = W(UF)$$
$$W(f) = \mathbb{R}^{\geq 0} = D(UF)$$

www.raphael-liebe.de

<u>Ausblick</u> Grenzwert und Stetigkeit von Funktionen