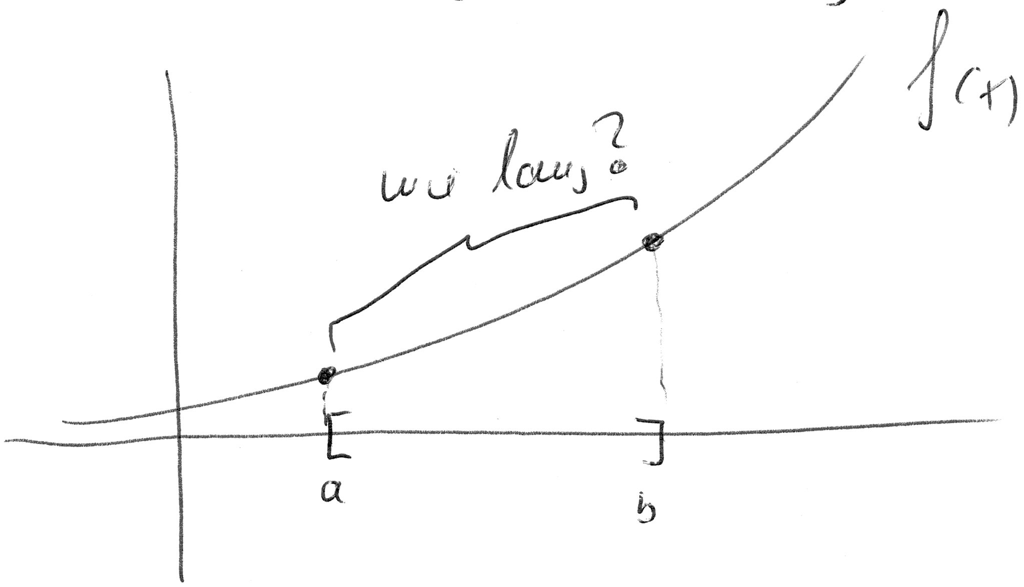
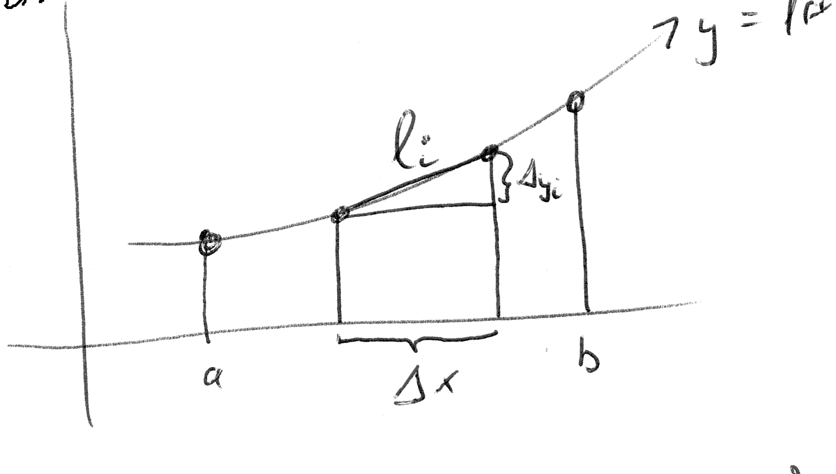
498

Bogenlänge



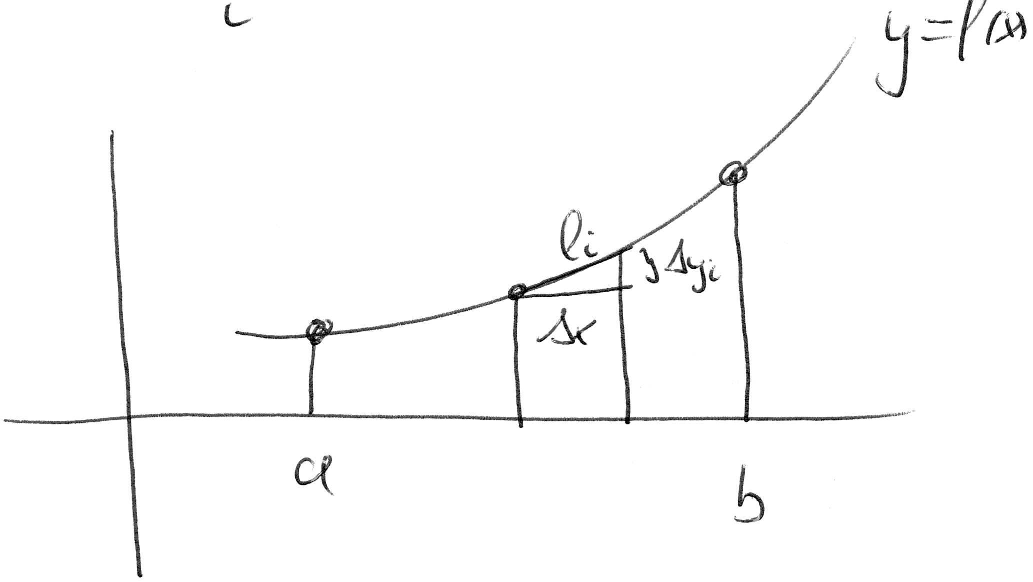
Vorgehensweise: Man unterteilt das Intervall $[a,b]$ in n gleich große Teile der Breite Δx.

$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ | $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = f'(x)$

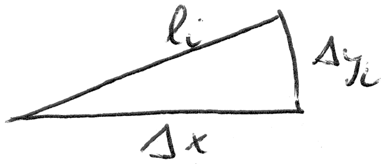


Ist auf dem i-ten Intervall die eingezeichnete Sehnenlänge l_i, so gilt für die gesamte Bogenlänge L auf $[a,b]$:

$$L \approx \sum_i l_i$$



Nach Pythagoras gilt im Δ



$$l_i^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y_i)^2 \quad | \sqrt{\ }$$

$$\Rightarrow l_i = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y_i)^2} \quad | \underline{\underline{\text{Trick!!}}}$$

$$\Rightarrow l_i = \sqrt{\Delta x^2 \cdot \left[1 + \frac{(\Delta y_i)^2}{(\Delta x)^2}\right]}$$

$$\underline{\underline{l_i = \Delta x \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x}\right)^2}}}$$

Wegen $L \approx \sum_i l_i$

ist nun $L \approx \sum_i l_i = \sum_i \sqrt{1+\left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x}\right)^2} \cdot \Delta x$

<u>Grenzwertbetrachtung:</u> Die Intervallbreite (n-Intervalle) werden breitenmäßig verkleinert ($\Delta x \longrightarrow 0$) und zahlenmäßig vergrößert ($n \to \infty$).

Wegen $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$

gilt damit

$$L_{f(x)} = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}$$

455

Nachteile

- Das auftretende Integral ist (leider) nur für wenige Funktionen elementar lösbar.

- Eine „näherungsweise" Berechnung geht u.a. über

$$L \approx \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y_i)^2}$$

Beispiel $f(x) = \sqrt{x^3}$ $\quad [a,b] = [0,2]$

1. Schritt $\quad f'(x) = \left[x^{\frac{3}{2}}\right]'$

$$= \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$$

2. Schritt $\quad$ Einsetzen in Formel:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$

$$L = \int_0^2 \sqrt{1 + \left[\frac{3}{2}\sqrt{x}\right]^2}\, dx$$

$$= \int_0^2 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}\, dx$$

Substitution $1 + \frac{9}{4}x = z \quad | \, [\;]'_x$

$$\Rightarrow \frac{9}{4} = z' \qquad \left[z' = \frac{dz}{dx}\right]$$

$$\Rightarrow \frac{9}{4} = \frac{dz}{dx} \qquad | \cdot dx$$

$$\Rightarrow \frac{9}{4} dx = dz \qquad | \cdot \frac{4}{9}$$

$$\Rightarrow dx = \frac{4}{9} d\cancel{z}$$

$$\int_{\cancel{0}}^{\cancel{2}} \sqrt{1+\frac{9}{4}x}\, dx$$

$$= \int \sqrt{z} \cdot \frac{4}{9}\, dz$$

$$= \frac{4}{9} \int z\, dz = \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{2} z^2 = \underline{\underline{\frac{2}{9} z^2}}$$

<u>Rücksubstitution</u>

$$\frac{2}{9} z^2 = \frac{2}{9}\left[1+\frac{9}{4}x\right]^2$$

$$= \frac{2}{9}\left[1 + \frac{18}{4}x + \frac{81}{16}x^2\right]$$

$$= \frac{2}{9} + x + \frac{9}{8}x^2$$

$$\int_0^2 \sqrt{1+\frac{9}{4}x}\, dx = \frac{2}{9} + x + \frac{9}{8}x^2 \Big|_0^2$$

$$= \left[\frac{2}{9} + 2 + \frac{9}{2}\right] - \left[\frac{2}{9} + 0 + 0\right] = \underline{\underline{6\frac{1}{9}}} \text{ LEen}$$

6

Ausblick

Näherungsmethoden der Integralrechnung:

- Trapezmethode
- Tangentenmethode
- Simpsonregel
- Keplersche Faßregel