508

Taylorreihen

Worum geht es?

„Komplizierte" Funktionen $\xrightarrow{\text{werden}}$ „einfache" Funktionen
ersetzt
durch

Beispiel

$$f(x) = \sin(x)$$
$$f(x) = e^x$$
$$f(x) = \log(1+x)$$
$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$

$\Bigg\} \rightarrow$ Polynome ersten, zweiten, dritten..... n-ten Grades

Hinweis Alle folgenden Betrachtungen werden – zur Vereinfachung – an der Stelle $x_0 = 0$ durchgeführt.

Wir „ersetzen" $f(x) = \sin x$ $\quad x_0 = 0$

durch ein Polynom 1. Grades
" " 2. Grades
" " 3. Grades
" " 4. Grades
" " 5. Grades

Wir wollen – s.o. ~~[illegible]~~ – die Stelle $x_0 = 0$ und ersetzen dort $f(x) = \sin x$ durch seine Tangente [Polynom 1. Grades]

$f(x) = \sin x \qquad x_0 = 0 \qquad y_t = mx + b$

$m = f'(0) = \cos(0) = 1 \qquad P(0|\sin(0)) = (0|0)$

$$\left.\begin{array}{l} y = 1 \cdot x + b \\ 0 = 1 \cdot x + b \\ b = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \boxed{y_T = \cancel{1}x + 0}$$

Wir „ersetzen" $f(x) = \sin x$ an der Stelle $x_0 = 0$
durch eine ganzrationale Funkt. 2. Grades

$$y = \underline{a}x^2 + \underline{b}x + \underline{c}$$

und benutzen als „zusätzliche Angabe" $f''(0)$.

$$f''(0) = \sin''(0) = -\sin(0) = 0$$

Und es war $f'(0) = 1$ und $f(0) = 0$

$$y = ax^2 + bx + c$$

$(0|0)$: $\quad 0 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c \Rightarrow \underline{\underline{c = 0}}$

$f'(0) = 1$ $\quad y' = 2ax + b$

$1 = 2a \cdot 0 + b \quad \underline{\underline{b = 1}}$

$f''(0) = 0$ $\quad y'' = 2a = 0 \quad \underline{\underline{a = 0}}$

$$\underline{\underline{y = 0 \cdot x^2 + 1 \cdot x + 0}}$$

(hatten wir schon)

③

Wir ersetzen $f(x) = \sin x$ an der Stelle $x_0 = 0$ durch eine ganzrationale Funktion 3. Grades,

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

und benutzen zusätzlich $\sin'''(0)$:

$$\sin x' = \cos x$$
$$\cos' = -\sin x$$
$$-\sin' x = -\cos x \qquad -\cos(0) = -1 = f'''(0)$$

$$y = \underline{a}x^3 + \underline{b}x^2 + \underline{c}x + \underline{d}$$

✓ $(0|0)$ $\qquad \underline{\underline{d = 0}}$

✓ $f'(0) = 1$ $\qquad 3ax^2 + 2b + c = c$

$$\underline{\underline{c = 1}}$$

✓ $f''(0) = 0$ $\qquad 6ax + 2b = 0$

$$\underline{\underline{b = 0}}$$

✓ $f'''(0) = -1$ $\qquad 6a = -1$

$$a = -\frac{1}{6}$$

$$\underline{\underline{y = -\frac{1}{6}x^3 + x}}$$

4

Das Verfahren lässt sich beliebig fortsetzen.

$$\sin(x) \overset{!}{\approx} \frac{1}{1!}x^1 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9 \pm \ldots$$

→ Grafisch ist das sehr beeindruckend

→ Das geschilderte Verfahren lässt sich an <u>jede Stelle x_0</u> $x_0 \in \mathbb{R}$ durchführen.

Fragen??? Wünsche??? Anregungen???

....

Wer Fragen, Wünsche, Anregungen...hat, schreibt zum Video ein Posting oder schickt mir eine Mail unter

nachhilfelatmath@gmail.com

Unterlagen zu meinen Mathe- und Lateinvideos findet man auf

www.raphael-biere.de

als kostenlosen pdf-Download.

Die Playlist meiner Lateinvideos findet man hier:

https://www.youtube.com/user/NachhilfeLatein/playlists

Zur Playlist meiner vielen Mathevideos geht es hier lang:

https://www.youtube.com/user/Mathematikaufgaben/playlists

Wir suchen $f(x) = e^x$ 508

Wir wählen um - zur rechnerischen

Vereinfachung - $x_0 = 0$.

Polynom 1. Grades [Tangente]

$f(x) = e^x \quad f(0) = e^0 = 1 \quad f'(0) = e^0 = 1$

$\boxed{y = mx + b} \quad m = f'(0) = e^0 = 1$

$y = 1 \cdot x + b \quad P(0 | e^0) = (0|1)$

$1 = 1 \cdot 0 + b \quad b = 1$

$\underline{\underline{y = x + 1}}$

Polynom 2. Grades [„Parabel"]

$f(x) = e^x$ $\quad x_0 = 0$

$f(0) = e^0 = 1 \quad f'(0) = e^0 = 1 \quad f''(0) = e^0 = 1$

$P(0|e^0) = (0|1)$

$$\boxed{\begin{aligned} y &= ax^2 + bx + c \\ y' &= 2ax + b \\ y'' &= 2a \end{aligned}}$$

g

$f(0)=1$:	$1 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c$		$c = 1$
$f'(0)=1$:	$1 = 2a \cdot 0 + b$		$b = 1$
$f''(0)=1$	$1 = 2a$		$a = \frac{1}{2}$

$$\underline{\underline{y = \frac{1}{2}x^2 + x + 1}}$$

Ohne Rechnung – leicht selbst nachzurechnen –

3. Grades $\underline{\underline{y = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + 1}}$

Wir suchen $f(x) = \log_{10}(1+x)$ ~~$50\,17$~~

$= \ln(1+x)$ $S\,10$

$x_0 = 0$

$f(0) = \ln(1+0) = \ln(1) = 0$

$f'(0) = \left.\frac{1}{1+x}\right|_{x=0} = 1 = m$

$y = m \cdot x + b$

$P(0|0)$

$y = 1 \cdot x + b$

$0 = 1 \cdot 0 + b \quad b = 0$

$y = x$

8

Polynom 2. Grades $y = ax^2 + bx + c$

$f(0) = \ln(1) = 0$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u v'}{v^2}$

$f'(0) = \left.\frac{1}{1+x}\right|_{x=0} = 1$

$f''(x) = \frac{0 \cdot (1+x) - 1 \cdot 1}{(1+x)^2} = \frac{-1}{(1+x)^2}$

$f''(0) = \frac{-1}{(1+0)^2} = -1$

$\boxed{y = ax^2 + bx + c}$

$y' = 2ax + b$

$y'' = 2a$

$f(0) = 0 \Rightarrow c = 0$

$f'(0) = 1 \Rightarrow 1 = 2a \cdot 0 + b \Rightarrow b = 1$

$f''(0) = -1 \Rightarrow -1 = 2a \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$

$$y = -\frac{1}{2}x^2 + x$$

Fragen??? Wünsche??? Anregungen???
….

Wer Fragen, Wünsche, Anregungen...hat, schreibt zum Video ein Posting oder schickt mir eine Mail unter

nachhilfelatmath@gmail.com

Unterlagen zu meinen Mathe- und Lateinvideos findet man auf

www.raphael-biere.de

als kostenlosen pdf-Download.

Die Playlist meiner Lateinvideos findet man hier:

https://www.youtube.com/user/NachhilfeLatein/playlists

Zur Playlist meiner vielen Mathevideos geht es hier lang:

https://www.youtube.com/user/Mathematikaufgaben/playlists

Wir ersetzen $f(x) = \frac{1}{1-x}$ $\left[\frac{u}{v}\right]$ 5.1.1

$\frac{u'v - u \cdot v'}{v^2}$

durch ein Polynom 1. Grades:

$f(0) = \frac{1}{1} = 1$ $f'(x) = \frac{\cancel{0 \cdot (1-x)} - 1 \cdot (-1)}{(1-x)^2}$

$x_0 = 0$

$= \frac{1}{(1-x)^2}$

$f'(0) = 1 = m$

$y = m \cdot x + b$

$y = 1 \cdot x + b$ $P(0|1)$

$1 = 0 + b$ $b = 1$

$\underline{y = x + 1}$

durch ein Polynom 2. Grades

$f(0)=1$

$f'(0)=\frac{1}{(1-0)^2}=1$

$f'(x)=\frac{1}{(1-x)^2}$

$$f''(x)=\frac{\cancel{0\cdot(1-x)^2}-1\cdot 2(1-x)^1\cdot(-1)}{(1-x)^4}$$

$$=\frac{2(1-x)}{(1-x)^4}=\frac{2}{(1-x)^3} \qquad x\neq 1$$

$f''(0)=\frac{2}{1}=2$

$\boxed{y=ax^2+bx+c}$

$y'=2ax+b$
$y''=2a$

$f(0)=1 \qquad \underline{\underline{1=c}}$

$f'(0)=1 \qquad 1=2a\cdot 0+b \qquad \underline{\underline{b=1}}$

$f''(0)=2 \qquad 2a=2 \qquad \underline{\underline{a=1}}$

$$\underline{\underline{f_y=1\cdot x^2+1\cdot x+1}}$$

11

Verallgemeinerungen

Für jedes der aufgezeigten Beispiele gilt:

$$x_0 = 0$$

$$\sin(x) = 1 - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 \pm \ldots\Big|_n$$

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!}x^1 + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \ldots\Big|_n + \ldots + \ldots + \ldots$$

$$\log_{10}(1+x) = x^1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 \pm \ldots\Big|_n$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x^1 + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots\Big|_n$$

Man nennt diese „unendlichen" Reihen auch „Taylorreihen"

Speziell diese wegen $x_0 = 0$ auch

Mc Laurin-Reihen

Fragen??? Wünsche??? Anregungen???
....

Wer Fragen, Wünsche, Anregungen...hat, schreibt zum Video ein Posting oder schickt mir eine Mail unter

nachhilfelatmath@gmail.com

Unterlagen zu meinen Mathe- und Lateinvideos findet man auf

www.raphael-biere.de

als kostenlosen pdf-Download.

Die Playlist meiner Lateinvideos findet man hier:

https://www.youtube.com/user/NachhilfeLatein/playlists

Zur Playlist meiner vielen Mathevideos geht es hier lang:

https://www.youtube.com/user/Mathematikaufgaben/playlists

Ausblick

→ Zahlenfolgen
→ Grenzwerte
→ Grenzwertsätze
→ Die Eulersche Zahl e als Grenzwert:

$$\lim_{n \to \infty} \left[1 + \frac{1}{n}\right]^n = e$$

→ Grenzwerte bei Funktionen
→ Nullstellensatz
→ Zwischenwertsatz