In Kürze:

Einführung in die Höhere Mathematik für Studienanfänger

Videosequenzen von ca 15-20 Minuten mit leicht verständlich erklärter Theorie, Aufgaben, vorgerechneten Lösungen für Studienbeginner,-anfänger(innen) und für all die, die es interessiert.

Alle Unterlagen zu den Videosequenzen frei downloadbar als pdf unter:

http://raphael-biere.de/mathematik.html

Vektorräume

Was braucht man?

→ eine [nichtleere] Menge V mit Elementen [„Vektoren"]

z. B. $\left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \middle| a_1, a_2 \in \mathbb{R} \right\}$

→ eine „Addition" der „Vektoren"

$$\vec{a}, \vec{b} \to \vec{a} \oplus \vec{b} := \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix}$$

→ eine „Multiplikation" zwischen einer reellen Zahl r und einem Vektor $\vec{a}$,

$$r \odot \vec{a} := \begin{pmatrix} r a_1 \\ r a_2 \end{pmatrix}$$

→ die Gültigkeit folgender Gesetze:

bzg ⊕

→ zu $\vec{a}, \vec{b}$ muß es genau ein Element $\vec{a} \oplus \vec{b}$ geben, das wieder in der Menge V liegt.

→ $\vec{a} + \vec{o} = \vec{a}$ „Nullelement" aus V

→ $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$ Assoziativgesetz

→ $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ Kommutativgesetz

→ $r \cdot \vec{a}$ muß wieder zu eindeutig bestimmten Element aus V sein

→ $r(\vec{a} + \vec{b}) = r\vec{a} + r\vec{b}$
$(r+s)(\vec{a}) = r\vec{a} + s\vec{a}$ } Distributivgesetz

→ $r \cdot (s\vec{a}) = (r \cdot s)\vec{a}$

→ $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$ das „Eins"element

1. Beispiel

$(V, \oplus, \odot)$ mit $V = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \middle| a_i \in \mathbb{R} \right\}$ ist ein Vektorraum!

→ V ist nicht leer, z.B $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

→ $\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix}$ ist eindeutig und wieder aus V

→ $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + 0 \\ a_2 + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \vec{a}$

→ $\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 + a_1 \\ b_2 + a_2 \end{pmatrix} = \vec{b} + \vec{a}$

→ $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 + c_1 \\ b_2 + c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 + c_1 \\ a_2 + b_2 + c_2 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$

$\Rightarrow r \cdot \vec{a} = r \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ra_1 \\ ra_2 \end{pmatrix}$ ist eindeutig bestimmt

und wieder aus V.

$$\Rightarrow r(\vec{a} + \vec{b}) = r \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(a_1 + b_1) \\ r(a_2 + b_2) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ra_1 + rb_1 \\ ra_2 + rb_2 \end{pmatrix} = r\vec{a} + r\vec{b}$$

~~tt~~ u.s.w. bis endlich

$$1 \cdot \vec{a} = 1 \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1a_1 \\ 1a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \vec{a}$$

Weitere Beispiele

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \middle| \, a_i \in \mathbb{R} \right\}$$ mit $\oplus$ und $\odot$ wie

oben ist ein Vektorraum.

Das $n \in \mathbb{N}$ ist beliebig wählbar:

$n = 4$

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} \middle| \, a_i \in \mathbb{R} \right\}$$ mit $\oplus$ und $\odot$ wie oben

www.raphael-bere.de

Gegenbeispiele

(1.) $V = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix} \middle| a \in \mathbb{R} \right\}$ mit $\oplus$ und $\odot$ wie üblich

Man fängt „oben" an:

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ b \end{pmatrix}$

$\vec{a} + \vec{b}$ muß wieder aus V sein:

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1 \\ a+b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ a+b \end{pmatrix}$$

$a+b$ ist wieder eine reelle Zahl, aber in der ersten Komponente steht „2", daher

$\begin{pmatrix} 2 \\ a+b \end{pmatrix} \notin V$

Die „Abgeschlossenheit" ist nicht erfüllt.

(2) $V = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \middle| \; x_1 + x_2 = \underline{1} \right\}$ $\oplus, \cdot$ wie üblich

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ mit $x_1 + x_2 = 1$

$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ mit $y_1 + y_2 = 1$

Dann ist

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix}$$

mit $\underbrace{(x_1 + y_1)}_{1.\text{Komp}} + \underbrace{x_2 + y_2}_{2.\text{Komp}} = 1 + 1 = 2$!

also ist $\begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix} \notin V$

Es liegt kein Vektorraum vor.

6

Weitere Beispiele

$V = \{ a_n \mid a_n$ ist eine reelle Zahlenfolge $\}$

$\oplus$ sei so erklärt

$(a_n) \oplus (b_n) = (a_n + b_n)$

also $(a_1, a_2, a_3 \ldots) \oplus (b_1, b_2, b_3 \ldots)$

$= (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3, \ldots)$

$\odot$ sei so erklärt

$r \cdot (a_n) = (r a_n)$ also

$r \cdot (a_1, a_2, a_3 \ldots) = (r a_1, r a_2, r a_3, \ldots)$

V ist ein Vektorraum, z.B. (7) gilt:

$\rightarrow (a_n) + (b_n)$

$= (a_n + b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots)$ ist wieder eine Zahlenfolge

$\rightarrow \underline{(a_n) + (0_n)}$

$= (a_1, a_2, a_3, \dots) + (0, 0, 0, \dots)$

$= (a_1 + 0, a_2 + 0, a_3 + 0, \dots)$

$= (a_1, a_2, a_3, \dots)$

$= \underline{\underline{(a_n)}}$

... oder

$r \cdot (s \cdot a_n)$

$= r(s \cdot (a_1, a_2, \dots)) = r(sa_1, sa_2, \dots)$

$= (rsa_1, rsa_2, \dots)$

$= ((rs)a_1, (rs)a_2, \dots)$

$= \underline{rs(a_n)}$

www.raphael-biere.de

Ein letztes Beispiel

Ein rechteckiges Zahlenschema der Form $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$ mit a_i heißt „2×2-Matrix".

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \middle| \, a_i \in \mathbb{R} \right\}$$

Wir erklären.

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \oplus_M \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1+b_1 & a_2+b_2 \\ a_3+b_3 & a_4+b_4 \end{pmatrix}$$

und

$$r \odot_M \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r a_1 & r a_2 \\ r a_3 & r a_4 \end{pmatrix}$$

$(V, \oplus_M, \odot_M)$ ist ein Vektorraum.

Wegen der vielen Schreibarbeit nur „Auszüge" aus den zu beweisenden Eigenschaften

$\rightarrow$ Mit $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}$

ist $A \oplus_m B = \begin{pmatrix} a_1+b_1 & a_2+b_2 \\ a_3+b_3 & a_4+b_4 \end{pmatrix} \in V$!

$$\rightarrow \underline{\underline{O \oplus_m A}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \oplus_m \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0+a_1 & 0+a_2 \\ 0+a_3 & 0+a_4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} = \underline{\underline{A}}$$

$$\rightarrow A + B = \begin{pmatrix} a_1+b_1 & a_2+b_2 \\ a_3+b_3 & a_4+b_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1+a_1 & b_2+a_2 \\ b_3+a_3 & b_4+a_4 \end{pmatrix}$$

$$= \underline{B \oplus_m A}$$

10

$\underline{1} \odot_n A = 1 \odot_n \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 1a_1 & 1a_2 \\ 1a_3 & 1a_4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{= A}}$$

www.raphael-biere.de

Es folgen

lineare Abhängigkeit

lineare Unabhängigkeit

In Kürze:

Einführung in die Höhere Mathematik für Studienanfänger

Videosequenzen von ca 15-20 Minuten mit leicht verständlich erklärter Theorie, Aufgaben, vorgerechneten Lösungen für Studienbeginner,-anfänger(innen) und für all die, die es interessiert.

Alle Unterlagen zu den Videosequenzen frei downloadbar als pdf unter:

http://raphael-biere.de/mathematik.html