Höhere Mathematik für Studienanfänger, Nebenfächler

$\boxed{\text{Video 10}}$

Potenzreihen

Inhaltsverzeichnis am Videoanfang!

www.raphael-bive.de

Inhaltsverzeichnis

Aus „Alt" mach' „Neu"

Für $|q|<1$ nur – siehe letztes Video –

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} = 1+q^1+q^2+\dots+q^4+\dots \overset{!}{=} \underbrace{\frac{1}{1-q}}_{\text{Grenzwert der Partialsummenfolge}}$$

Vertausche „q" mit „x"

$$\underbrace{1+x^1+x^2+x^3+\dots+x^4+\dots}_{\text{„Polynom"!!!}} \overset{!}{=} \underbrace{\frac{1}{1-x}}_{\text{gebrochen rationale Funktion } f(x)} \qquad |x|<1$$

Kann man jede Funktion $f(x)$ als „Polynom" darstellen? [... leider nein...]

$$\underbrace{f(x)}_{\text{eine „komplizierte" Funktion}} \overset{?}{=} \underbrace{a_0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots}_{\text{ein „einfaches" Polynom mit zu bestimmenden Koeffizienten } a_1, a_2, \ldots}$$

Am Anfang macht man es sich einfach

Sei $x_0 = 0$, also

$$f(0) \overset{?}{=} a_0 + a_1 \cdot 0^1 + a_2 \cdot 0^2 + \ldots$$

$$\boxed{f(0) = a_0}$$

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x^1 + 3a_3 x^2 + \ldots$$

$$\boxed{f'(0)} = a_1 + 2a_2 \cdot 0 + 3a_3 \cdot 0^2 + \ldots$$

$$\boxed{= a_1}$$

Offenbar muß die „Funktion $f(x)$", die man durch ein „Polynom" ersetzen will, beliebig oft differenzierbar sein.

$$f''(x) = 2a_2 + 6a_3x^1 + \dots$$

$$\boxed{f''(0)} = 2a_2 + 6a_3 \cdot 0^1 + \dots$$

$$= \boxed{2a_2}$$

$$f'''(x) = 6a_3x^0 + \dots$$

$$\boxed{f'''(0) = 6a_3} + 0 \dots$$

usw.

Zusammenfassung

Will man eine „komplizierte" Funktion $f(x)$ durch ein „Polynom" ersetzen, so gilt – an der Stelle $x_0=0$ – offenbar:

$$f(0)=1\cdot a_0 \overset{!}{=} 0!\cdot a_0 \quad [\text{weil } 0!=1]$$

$$f'(0)=1\cdot a_1 \overset{!}{=} 1!\cdot a_1$$

$$f''(0)=2a_2 = 2!\cdot a_2$$

$$f'''(0)=6a_3 = \underline{\underline{3!}}\cdot a_3$$

$$\downarrow$$

$$f^{(n)}(0)=n!\cdot a_n \Leftrightarrow a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

und man erhält

$$f(x)=a_0+a_1\cdot x^1+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots$$

$$= \cancel{0!}\cdot a$$

$$= f^{(0)}(0)$$

4

$$f(x) = \underbrace{\frac{f^{(0)}(0)}{0!}}_{a_0} \cdot x^0 + \underbrace{\frac{f'(0)}{1!}}_{a_1} \cdot x^1 + \underbrace{\frac{f''(0)}{2!}}_{a_2} \cdot x^2 + \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n$$

Beispiel

Die „komplizierte" Funktion $f(x) = e^x$ soll an der Stelle $x_0 = 0$ durch ein „Polynom" ersetzt werden, also

$$e^x \stackrel{?}{=} a_0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$$

gesucht: a_i

5

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(0)$	$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$
0	e^x	1	$a_0 = \frac{1}{0!} = \frac{1}{1} = 1$
1	e^x	1	$a_1 = \frac{1}{1!} = 1$
2	e^x	1	$a_2 = \frac{1}{2!} = \frac{1}{2}$
3	e^x	1	$a_3 = \frac{1}{3!} = \frac{1}{6}$
4	e^x	1	$a_4 = \frac{1}{4!} = \frac{1}{24}$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
n	e^x	1	$a_n = \frac{1}{n!}$

$$e^x \Big|_{\text{an der Stelle } x_0=0} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot x^n$$

$$= 1 + x^1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \ldots + \frac{1}{n!}x^n + \ldots$$

6

Beispiel

Die „komplizierte" Funktion „$f(x) = \sin(x)$" soll an dem „Entwicklungspunkt $x_0 = 0$" als „Mac-Laurin-Reihe" dargestellt werden.

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(0)$	$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$
0	$\sin x$	$\sin(0) = 0$	$a_0 = \frac{0}{0!} = 0$
1	$\cos x$	$\cos(0) = 1$	$a_1 = \frac{1}{1!} = 1$
2	$-\sin x$	$-\sin(0) = 0$	$a_2 = \frac{0}{2!} = 0$
3	$-\cos x$	$-\cos(0) = -1$	$a_3 = \frac{-1}{3!} = -\frac{1}{6}$
4	$\sin x$ siehe oben		
5	$\cos x$ siehe oben		

$$\sin x \overset{!}{=} 0 \cdot x^0 + 1 \cdot x^1 + 0 \cdot x^2 - \frac{1}{3!} x^3 + \cancel{0 \cdot x^4} + \frac{1}{5!} x^5 + \ldots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

7

Bemerkungen

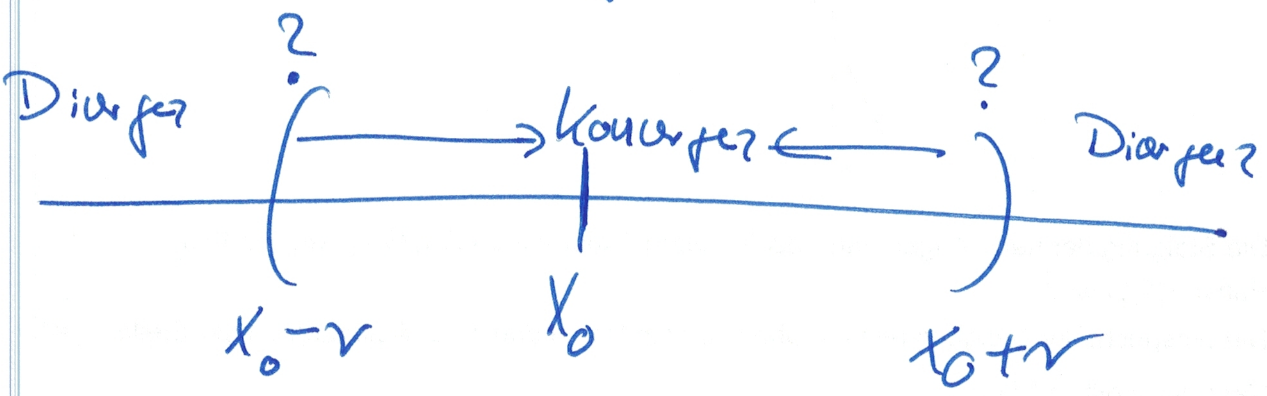
- Die erwähnten "Potenzreihe" heißen – wegen $x_0 = 0$ – Mac-Laurin-Reihe.
- $x_0 = 0$ heißt „Entwicklungspunkt"
- Die „zu entwickelnde Funktion $f(x)$"-muß erkennbar beliebig oft differenzierbar sein
- Die Frage, für welche x-Werte die entsprechende Reihe nun konvergent/divergent ist, wird beantwortet durch:

8

Konvergenzradius r

Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ eine Potenzreihe mit Entwicklungspunkt x_0. Dann gibt es ein $r \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{\infty\}$, so daß die obige Reihe **konvergiert** für alle x mit $|x-x_0| < r$ und **divergiert** für alle x mit $|x-x_0| > r$.

r heißt „**Konvergenzradius**“



$r = \infty$ bedeutet: die Potenzreihe konvergiert für jedes x.

Und wie berechnet man „r“?

$$\boxed{\text{Bestimmung des Konvergenzradius } r}$$

Ist eine Potenzreihe $P(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n\cdot(x-x_0)$

Entwicklungspunkt

konvergent mit dem Grenzwert s, so gilt:

$$r=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

Beispiel vom Videoanfang

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\cdot x^n \qquad x_0=0$$

$$r=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}}\right|$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n!}\cdot\frac{(n+1)!}{1}\right|=$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)\cdot n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}|n+1| = \lim_{n\to\infty}(n+1) = \infty$$

$$r \overset{!}{=} \infty$$

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\, x^{2n+1}$$

$$r = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \left|\frac{\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}}{\frac{(-1)^{n+1}}{(2(n+1)+1)!}}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n\quad(2n+3)!}{(2n+1)!\ (-1)^{n+1}}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(2n+3)(2n+2)\cdot 1}{1\cdot(-1)^1}\right|$$

(1)

$$= \lim_{n\to\infty} \left| (-1)\left[4n^2 + 10n + 6\right] \right| = \underline{\underline{\infty = r}}$$

12

Beispiel

mit Randuntersuchung

$x_0 = 0 \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n} \cdot x^n$

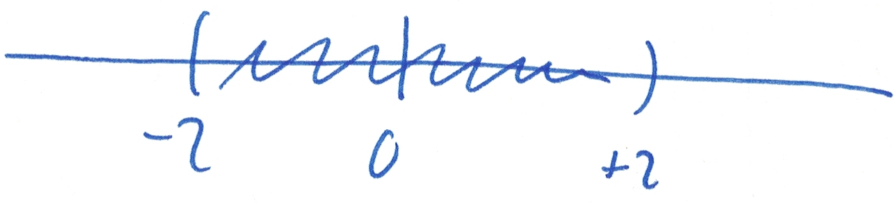
$a_n = \frac{1}{n \cdot 2^n}$

$$r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim \left| \frac{\frac{1}{n\cdot 2^n}}{\frac{1}{(n+1)2^{n+1}}} \right|$$

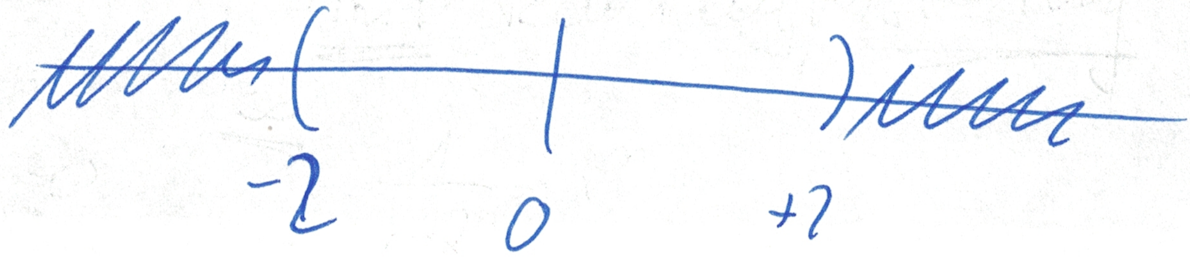
$$= \lim \left| \frac{1}{\cancel{n \cdot 2^n}} \; (n+1)\cdot 2^{n+1} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{2\cdot(n+1)}{n} \right|$$

$$= \lim \left| \frac{2n+2}{n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| 2 + \frac{2}{n} \right| = \underline{\underline{2 = r}}$$

Die obige Reihe ist konvergent für



Die Reihe ist divergent für



Für $x=+2$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\cdot 2^n}\cdot x^n \underset{x=2}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\cdot 2^n}\cdot 2^n$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$ also die divergente harmonische Reihe.

Für $x=-2$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\cdot 2^n}\cdot (-2)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot (-1)^n\cdot \cancel{2^n}}{n\cdot \cancel{2^n}}$$

also die alternierende harmonische Reihe, die konvergent ist.

14

Taylorreihe

„Löst" man sich von $x_0 = 0$ [Maclaurin Reihe] und betrachtet man $x_0 \in \mathbb{R}$ beliebig, kommt man zur „Taylorreihe":

$$\underline{\underline{f(x)}} = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)^1 + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots$$

$$\underline{\underline{= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n}}$$

[Der Konvergenzradius: $r = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}}$ bzw $r = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$; die Reihe konvergiert dann für alle x mit $x_0 - r < x < x_0 + r$]

mit $x = x_0 + h$ findet man in vielen Büchern auch

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}\cdot \underline{\underline{h}}^1 + \frac{f''(x_0)}{2!}\cdot \underline{\underline{h}}^2 + \ldots$$

$\boxed{\text{Beispiel}}$

$f(x) = \ln x$ mit $x_0 = 1$

$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(1)$	$a_n = \frac{f^{(n)}(1)}{n!}$
$f^{0}(x) = \ln(x)$	$\ln(1) = 0$	$a_0 = 0$
$f'(x) = x^{-1}$	$f'(1) = 1$	$a_1 = \frac{1}{1!} = 1$
$f''(x) = -x^{-2}$	$f''(1) = -1$	$a_2 = \frac{-1}{2!} = -\frac{1}{2}$
$f'''(x) = +2x^{-3}$	$f'''(1) = 2$	$a_3 = \frac{2}{3!} = \frac{1}{3}$
$f^{IV}(x) = -6x^{-4}$	$f^{IV}(1) = -6$	$a_4 = -\frac{1}{4}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\cdot(n-1)!\,x^{-n}$	$f^{(n)}(1) = (-1)^{n-1}(n-1)!$	$a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n!}$

und damit

$$\ln(x) = 0 + \frac{1}{1!}(x-1)^1 - \frac{1}{2!}\cdot(x-1)^2 + \frac{2}{3!}\cdot(x-1)^3 + \dots$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x-1)^n}{n}$$

Mit $r=1$ gilt

$$\overset{x_0-r}{1-1} < \overset{x}{x} < \overset{x_0+r}{1+1}$$

$$0 < x < 2$$

z.B.

$$\ln(2) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} +$$

[.. und jetzt weiß man endlich, warum der TR „so schnell" ln(2) berechnen kann.]

Die wichtigsten Potenzreihenentwicklungen einschließlich Konvergenzradius / Konvergenzbereich sowie man unter Angabe der obigen unterstrichenen „Suchworte"

Ausblick

Taylorreihe, Restglied, Näherungen u. Taylorpolynom

www.raphael-brire.de