Höhere Mathematik für Nebenfächler, Studienanfänger, ...

Video 18

- → Kurven
- → Flächen
- → Flächenkurven

Eine Einführung an Beispielen mit Hilfe von Geogebra/Maxima

Alle Unterlagen als kostenfreie pdf unter

www.raphael-kreis.de

Inhaltsverzeichnis

Funktionen
(a.d. Schule)

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= x^2 \\ g(x) &= \sin(x) \end{aligned}\right\} \text{„explizit"}$$

<u>allgemein</u> $f, g: \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longrightarrow f(x) \text{ oder } g(x) \end{array}$

$$x^2 + y^2 = 4 \quad \Big[\ \text{„implizit"}$$

Parameterdarstellung von Kurven(!)

$\boxed{\text{1. Beispiel}}$ $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ [„Ebene"]

$t \to (t, t^2)$

oder

$\boxed{\text{2. Beispiel}}$ $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$t \to (\cos(t), \sin(t))$

$\boxed{\text{3. Beispiel}}$ a, b konstante Zahlen > 0

$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$t \longrightarrow (a \cdot \cos t, b \cdot \sin(t))$

Bemerkungen

① Eine solche Parameterdarstellung wird oft „physikalisch“ interpretiert:

t sei „die Zeit“, dann gibt z. B (t, t^2) den „Kurvenpunkt“ zum Zeitpunkt t an.

② Eine Parameterdarstellung ist nicht eindeutig

(t, t^2) bzw $((x+1) / (x+1)^2)$ liefern „den gleichen“ Graphen

③ Eine Parameterdarstellung einer Kurve(!) unterscheidet erst einmal nicht zwischen „Funktion“ und „Relation“

④ Mit einer Parameterdarstellung, z. B (t, t^2) der Parabel oder $(\cos t, \sin t)$ kann man „Differentialrechnung“ betreiben

(t, t^2) abgeleitet gibt $(1, 2t)$

usw

(6) Die „allgemeine" Parameterdarstellung der Kurve im $\mathbb{R}^2$ [i.d. Ebene] lautet:

$$t \to (x(t), y(t)) \quad t \in [a,b] \text{ o.ä.}$$

Kurven im $\mathbb{R}^3$

(Kurven im Raum)

„Erweitert" man die besprochene Parameterdarstellung um „eine Achse/Dimension", erhält man eine <u>Raumkurve</u>

$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R} \hat{=} \mathbb{R}^3$$

1. Beispiel $\quad t \longrightarrow (t, t^2, t)$

$\qquad x \quad y \quad z$ – Achse

2. Beispiel $\quad t \rightarrow (\cos t, \sin t, t)$

$\qquad x \quad y \quad z$ – Achse

3. Beispiel $\quad t \rightarrow (a\cdot\cos t, b\cdot\sin t, t)$

z.B. mit $a=3$ $b=2$

Die Beispiele lassen sich beliebig variieren, ich empfehle: ausprobieren

<u>Vorschläge</u> $t \longrightarrow (x(t), y(t), z(t))$

(1) $t \to (\sin(t), t^2, t)$

(2) $t \to (\cos(t), e^t, \sin t)$

(3) $t \to (3 \cdot \cos^2(t), 2 \cdot \sin^2(t), \sin t \cdot \cos t)$

usw

Bemerkungen

Auch auf Raumkurven kann man die Differentialrechnung „loslassen", z. B.

$$f(t) = (\sin t, t^2, t) \quad t \in \mathbb{R}$$

Ableitung „sollte" $\hat{=}$ $(\cos t, 2t, 1)$ bzw.

$$\begin{pmatrix} \cos t \\ 2t \\ 1 \end{pmatrix}$$

Damit beschäftigt sich – u. a. – die

Differentialgeometrie

Flächen im Raum

→ „Kurven" – in der Ebene / Raum – kann man als „einparametrige" Gebilde beschreiben:

$$f: \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \\ t \to (x(t), y(t)) \end{array} \quad \text{oder} \quad f: \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ t \longrightarrow (x(t), y(t), z(t)) \end{array}$$

→ Erweitert man „auf 2 Parameter", – z. B t, v, so erhält man mit

$$f: \begin{array}{l} \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (t, v) \longrightarrow (x(t,v), y(t,v), z(t,v)) \end{array}$$

eine „Fläche im Raum $\mathbb{R}^3$"

1. Beispiel Die „Ebene"

$$f : (t,v) \longrightarrow (t+v,\ t-v,\ 2t+3v)$$

Wie Analytische Geometrie kann:

$$\begin{pmatrix} t+v \\ t-v \\ 2t+v \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{Ortsvektor}} + \underbrace{t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + v\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{Richtungsvektoren}}$$

2. Beispiel Eine Kugel

$$f(t,v) = (\cos t \cdot \cos v,\ \sin t \cdot \cos v,\ \sin v)$$

3. Beispiel Eine „Ebenenmanipulation"

Ebene $f: (t,v) \to (1-t-v, v, t+2v)$

„manipulierte Ebene" $f: (t,v) \to (1-t-v, \sin(v), t+2v)$

Bemerkungen

① $f(t,v) = \begin{pmatrix} x(t,v) \\ y(t,v) \\ z(t,v) \end{pmatrix}$ in Vektorschreibweise

② Die „Komponenten" – z. B $x(t,v)$ – sind „Funktionen von 2 Variablen"; sie können diffenziert – abgeleitet – werden, z. B

$$x(v,t) = v^2 + 4t$$

$$\frac{\partial x}{\partial v} = 2v + 0 \quad \text{bzw} \quad \frac{\partial x}{\partial t} = 0 + 4$$

usw

Differentialgeometrie der Fläche

Kurven auf Flächen:

Flächenkurven

1. Beispiel | Wir wählen die Kugel(oberfläche) als Fläche

$$f(u,v) = (5\cos u \cdot \cos v, 5\sin u \cdot \cos v, 5\sin v)$$

und lassen eine Variable konstant:

Sei $u = c$ z.B. $u = 2$

Es entstehen sog. <u>Parameterlinien</u>

Sei u variabel und $v = c$, z.B $v = 3$

2. Beispiel) $f(u,v) = (u+v,\ v,\ 3u-v)$

Ebene im $\mathbb{R}^3$

Wir wählen $u(t) = t$
$v(t) = t^2$

$$f(u(t), v(t)) = f(t) = (t+t^2,\ t^2,\ 3t-t^2)$$

als „Flächenkurve“.

Allgemein

Wird durch

$$f(u,v) = \left(x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v) \right)$$

eine Fläche dargestellt und setzt man

$$u = u(t)$$
$$v = v(t)$$

so erhält man mit

$$f(u(t), v(t)) = \left(x(u(t),v(t)),\ y(u(t),v(t)),\ z(u(t),v(t)) \right)$$

eine „Flächenkurve", d.h.

eine Kurve [abhängig von t] auf der Fläche $f(u,v)$

Beispiele

(1) $f(u,v) = (u+2v,\ u-v,\ 3u+v)$

[Ebene]

Wir setzen $u(t) = t^2$

$v(t) = \sin(t)$

und erhalten

$$f(t) = (t^2 + 2\sin(t),\ t^2 - \sin(t),\ 3t^2 + \sin(t))$$

(2) Kugeloberfläche

$$f(u,v) = (\cos u \cdot \cos v,\ \sin u \cdot \cos v,\ \sin v)$$

Wir setzen $u = \text{const}$, z. B. $u = 2$
und erhalten

$$f(v) = (\cos 2 \cdot \cos v,\ \sin 2 \cdot \cos v,\ \sin v)$$

eine sog. „Parameterlinie."

3) Durch $f(u,v) = (2+u+v, 1-u+2v, 3-v)$ ist eine Ebene im Raum gegeben.

Wir setzen $u(t) = 2t$
$v(t) = t^2$ und erhalten

$$f(t) = (2+2t+t^2, 1-2t+2t^2, 3-t^2)$$

als „Flächenkurve"

Viel Spaß beim „Ausprobieren"!

Alle Unterlagen auf

www.raphael-biere.de

<u>Ausblick:</u> Wichtiges zur
Eulerformel
(Video 19)