Höhere Mathematik für Studienanfänger, Nebenfächler usw

$\boxed{\text{Video 21}}$

Matrizen in $\mathbb{C}$

~~Fragen~~? Wünsche? Anregungen?

nachhilfelatmath@gmail.com

Inhalt

- → komplexe Matrizen
- → Rechenregeln, Beispiele
- → Determinante
- → konjugiert komplexe Matrizen; Rechenregel
- → konjugiert transponierte Matrix; Rechenregeln
- → „besondere" komplexe Matrizen:
  - = hermitesche Matrix
  - = schiefhermitesche Matrix
  - = unitäre Matrix

Die Elemente a_{ik} einer $m \times n$ Matrix können auch aus $\mathbb{C}$ sein:

$$A = \begin{pmatrix} 3+4i & 2i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad i^2 = -1$$

$$B = \begin{pmatrix} i & i-3 \\ 2+4i & 7-9i \\ 8 & 4 \end{pmatrix} \qquad \text{usw}$$

Alle Rechenregeln für reelle Matrizen gelten – sinngemäß – auch für „komplexe" Matrizen:

$$\lambda \cdot A \overset{\text{s.o.}}{=} \begin{pmatrix} \lambda(3+4i) & \lambda \cdot 2i \\ \lambda \cdot i & 0 \cdot \lambda \end{pmatrix}$$

$$\cancel{A \oplus B \overset{\text{s.o.}}{=}}$$

$$\begin{pmatrix} i & 2+i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2-3i & 4+2i \\ 6-i & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2i & 6+3i \\ 6-i & 4 \end{pmatrix}$$

1

Ebenso gelten die Regeln für das Subtrahieren und das Multiplizieren:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3+i \\ 1 & i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2\cdot 1 + (3+i)\cdot i & 2\cdot i + (3+i)(-2) \\ 1\cdot 1 + i\cdot i & 1\cdot i + (-2)\cdot i \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3+3i-1 & 2i - 6 - 2i \\ 1-1 & i - 2i \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2+3i & -6 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

„Natürlich" läßt sich auch der Determinantenbegriff übertragen.

$$A = \begin{pmatrix} 2-i & i \\ 3+i & 2i \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2+i & i \\ 3+i & 2i \end{vmatrix}$$

$$= (2+i)\cdot 2i - (3+i)\cdot i$$

$$= 4i + 2i^2 - 3i - i^2 \qquad i^2 = -1$$

$$= 4i - 2 - 3i + 1$$

$$= \underline{\underline{i - 1}} \in \mathbb{C}$$

Allgemein

$$A = (a_{ik})$$

$$= (b_{ik} + c_{ik} \cdot i) \qquad i^2 = -1$$

$$= b_{ik} + i \cdot c_{ik}$$

$$= B + i \cdot C$$

„Realteil" „Imaginärteil"

4

Konjugiert-komplexe Matrizen

$a = b + i\cdot c \quad a,b,c \in \mathbb{R}$

$a^* = b - i\cdot c$ „konjugiert-komplexe Zahl"

Sei $A = (a_{ik})$ „komplexe" Matrix.

"Ersetzt" man jedes Matrixelement a_{ik} durch sein „konjugiert komplexes a_{ik}^*",

so entsteht die

<u>Konjugiert-komplexe Matrix A^*</u>

$$A = \begin{pmatrix} 2-3i & -i \\ 5+2i & 1+i \end{pmatrix}$$

$$A^* = \begin{pmatrix} 2+3i & +i \\ 5-2i & 1-i \end{pmatrix}$$

oder $A = B + i\cdot C \xrightarrow{\text{Konjugierung}} A^* = B - i\cdot C$

Leicht einsehbar sind die

Rechenregeln für konjugiert-komplexe Matrizen

1.) $(A^*)^* = A$

2.) $(A+B)^* = A^* + B^*$

3.) $(A \cdot B)^* = A^* \cdot B^*$

Exemplarischer Beweis für 2.) für 2x2

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad A^* = \begin{pmatrix} a_{11}^* & a_{12}^* \\ a_{21}^* & a_{22}^* \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \quad B^* = \begin{pmatrix} b_{11}^* & b_{12}^* \\ b_{21}^* & b_{22}^* \end{pmatrix}$$

linke Seite

$$(A+B)^* = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{pmatrix}^*$$

$$= \begin{pmatrix} (a_{11}+b_{11})^* & (a_{12}+b_{12})^* \\ (a_{21}+b_{21})^* & (a_{22}+b_{22})^* \end{pmatrix}$$

G

Nun ist z. B

$$(a_{11} + b_{11})^* = a_{11}^* + b_{11}^*$$

linke Seite

$$(a_{11} + b_{11})^*$$

$$= \Big(\underbrace{(a+ib)}_{a_{11}} + \underbrace{(c+di)}_{b_{11}} \Big)^*$$

$$= \Big((a+c) + i\cdot(b+d) \Big)^*$$

$$= \underline{\underline{(a+c) - i\cdot(b+d)}}$$

rechte Seite

$$a_{11}^* + b_{11}^* = (a+ib)^* + (c+id)^*$$

$$= a - ib + c - id$$

$$= \underline{\underline{a + c - i(b+d)}}$$

7

$$\underset{s.S.6}{=} \begin{pmatrix} a_{11}^* + b_{11}^* & a_{12}^* + b_{12}^* \\ a_{21}^* + b_{21}^* & a_{22}^* + b_{22}^* \end{pmatrix}$$

<u>rechte Seite</u>

s.S.6

$$A^* + B^* = \begin{pmatrix} a_{11}^* & a_{12}^* \\ a_{21}^* & a_{22}^* \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11}^* & b_{12}^* \\ b_{21}^* & b_{22}^* \end{pmatrix}$$

$$= \underline{\underline{\begin{pmatrix} a_{11}^* + b_{11}^* & a_{12}^* + b_{12}^* \\ a_{21}^* + b_{21}^* & a_{22}^* + b_{22}^* \end{pmatrix}}}$$

S.C.

Konjugiert-transponiert Matrix

Vorbem.: Transponieren [„Stürzen" / „Spiegeln"] einer Matrix:

Zeilen $\xleftrightarrow{\text{entspr}}$ Spalten vertauschen

$$A \xrightarrow{\text{transp}} A^T$$

Wird eine Matrix erst „konjugiert" und dann „transponiert", so erhält man die

„konjugiert-transponierte Matrix"

8

Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 1+i & 2-3i \\ 4+2i & 3+i \end{pmatrix}$$

konjugieren:

$$A^* = \begin{pmatrix} 1-i & 2+3i \\ 4-2i & 3-i \end{pmatrix}$$

transponieren

$$(A^*)^T = \begin{pmatrix} 1-i & 4-2i \\ 2+3i & 3-i \end{pmatrix}$$

Der ~~Prozeß~~ Prozeß ist vertauschbar.

$$A = \begin{pmatrix} 1+i & 2-3i \\ 4+2i & 3+i \end{pmatrix}$$

transponieren

$$A^T = \begin{pmatrix} 1+i & 4+2i \\ 2-3i & 3+i \end{pmatrix}$$

Konjugieren

$$\left(A^T\right)^* = \begin{pmatrix} 1-i & 4-2i \\ 2+3i & 3-i \end{pmatrix}$$

$$= \left(A^*\right)^T$$

11

Die „<u>Konjugiert-transponierte Matrix</u>" kann mit $\bar{A}$ bezeichnet werden, also

$$\bar{A} = (A^*)^T = (A^T)^*$$

<u>Rechenregeln für $\bar{A}$</u>

(1) $\bar{\bar{A}} = A$

(2) $\overline{(A + B)} = \bar{A} + \bar{B}$

(3) $\overline{A \cdot B} = \bar{B} \cdot \bar{A}$!!!

<u>Erinnerung</u> $A \cdot B \underset{i.A}{\neq} B \cdot A$

Besondere „quadratische“ Matrizen in $\mathbb{C}$

(A) Hermitsche Matrix

[Charles Hermite, 1822–1901, Franzose]

Sei A eine komplexe, quadratische Matrix.

A heißt <u>hermitesch</u>, falls

$$A = \bar{A}$$

[d.h. $A = (A^*)^T$]

Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1-i & 4-4i \\ 1+i & 4 & i \\ 4+4i & -i & 7 \end{pmatrix}$$

ist hermitesch

$$A \overset{?}{=} (A^*)^T$$

1. Schritt

$A \rightarrow A^*$

$$A^* = \begin{pmatrix} 2 & 1+i & 4+4i \\ 1-i & 4 & -i \\ 4-4i & +i & 7 \end{pmatrix}$$

2. Schritt

$A^* \rightarrow (A^*)^T$

$$(A^*)^T = \begin{pmatrix} 2 & 1-i & 4-4i \\ 1+i & 4 & i \\ 4+4i & -i & 7 \end{pmatrix}$$

also $A = (A^*)^T$

14

Bemerkungen (u.a.)

① Offenbar stehen in der Hauptdiagonalen einer hermiteschen Matrix reelle Zahlen

② „Zerlegt" man eine hermitesche Matrix $A = B + i \cdot C$, so ist

→ der Realteil eine symmetrische Matrix

→ der Imaginärteil eine schiefsymmetrische Matrix.

③ Gilt $A = -\bar{A}$ d.h.

$$A = -(A^*)^T,$$ so heißt

A „schiefhermitesch"

Unitäre Matrizen (in $\mathbb{C}$)

(Auswahl)

Eine quadratische Matrix A in $\mathbb{C}$ heißt

<u>unitär</u>, falls

$$A \cdot \bar{A} = E \quad \text{, also}$$

$$A \cdot (A^{*})^{T} = E \quad \text{ist, wobei } E$$

die entsprechende Einheitsmatrix ist.

Beispiel

Wegen der schrecklichen „Multiplikation" sei $n=2$ ....

Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$

<u>1. Schritt</u>

$$A^* = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ +i & 0 \end{pmatrix}$$

<u>2. Schritt</u>

$$(A^*)^T = \begin{pmatrix} 0 & +i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$$

<u>3. Schritt</u>

$$A \cdot \bar{A} = A \cdot (A^*)^T = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & +i \\ -i & 0 \end{pmatrix}}_{(A^*)^T = \bar{A}}$$

$$= \begin{pmatrix} \underline{0 \cdot 0 + i \cdot (-i)} & \underline{0 \cdot i + i \cdot 0} \\ \underline{-i \cdot 0 + 0 \cdot (-i)} & \underline{-i \cdot +i + 0 \cdot 0} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} +1 & 0 \\ 0 & +1 \end{pmatrix} = E_{2 \times 2}$$

17

Bemerkungen
(Auswahl)

Sei A eine unitäre Matrix

$\Rightarrow$ $A^{-1} = \overline{A}^T$

d.h. inverse Matrix zu A und konjugiert transponierte zu A stimmen überein

$\Rightarrow$ Die Inverse einer unitären Matrix ist wieder unitär.

$\Rightarrow$ Das Produkt unitärer Matrizen ist wieder unitär.

Anregungen? Wünsche?
Schickt mir eine Mail oder postet es unter dem Video.
www.raphael-bove.de