Höhere Mathematik für Studienanfänger, Nebenfächler usw

$\boxed{\text{Peano Axiome} \\ \text{natürliche Zahlen} \\ \text{vollständige Induktion}}$

Peano Axiome
natürliche Zahlen
vollständige Induktion

Video 4

Peano-Axiome

Giuseppe Peano 1858-1932

→ 1 ist eine natürliche Zahl

→ Zu jeder natürlichen Zahl n gibt es eine natürliche Zahl n', den Nachfolger von n.

→ Zwei verschiedene natürliche Zahlen haben zwei verschiedene Nachfolger.

→ 1 ist nicht Nachfolger einer natürlichen Zahl

→ Enthält eine Menge natürlicher Zahlen die 1 und mit jeder natürlichen Zahl auch deren Nachfolger, so enthält die Menge alle natürlichen Zahlen.

Grundlage des Prinzips der vollständigen Induktion

$$\mathbb{N} = \{1; 2; 3; \dots n, n+1, \dots\}$$

$$\mathbb{N}_0 = \{0\} \cup \mathbb{N}$$

Vollständige Induktion

Eine Aussage A, die von $n \in \mathbb{N}$ abhängig ist, [$A(n)$] ist richtig, wenn man nachweisen kann:

① Die Aussage gilt für eine natürliche Zahl [$n=0$, $n=1$ oder $n=0$ ist auch zugelassen]
[Induktionsanfang]

② Wenn die Aussage auch für $k \in \mathbb{N}$ gilt, dann gilt sie auch für $k+1$.
[Induktionsschritt]

Beispiel

Behauptung $2^0 + 2^1 + 2^2 + .. + 2^n \overset{!}{=} 2^{n+1} - 1$

Induktionsanfang Wir wählen $n = 0$

$2^0 \overset{?}{=} 2^{0+1} - 1$ ja, denn

$\Leftrightarrow 1 = 2 - 1$

$\Leftrightarrow \underline{\underline{1 = 1}}$

Induktionsschritt

Wir setzen voraus, die obige Aussage gilt ~~hier~~ für $k \geq 0$, also

$$2^0 + 2^1 + .. + 2^k = 2^{k+1} - 1$$

Wir müssen zeigen:

Dann gilt sie auch für $k+1$:

$$2^0 + 2^1 + .. + 2^k + 2^{k+1} = 2^{(k+1)+1}$$

Zum Beweis dieser Gleichung rechnen wir die linke Seite [... und hoffen, daß die rechte herauskommt....]

$$2^0 + 2^1 + \ldots + 2^k + 2^{k+1}$$

$$= \underbrace{\left[2^0 + 2^1 + \ldots + 2^k\right]}_{} + 2^{k+1}$$

$$= \underbrace{\left[2^{k+1} - 1\right]}_{\text{nach Induktionsvoraussetzung}} + 2^{k+1}$$

$$= 2^{k+1} + 2^{k+1} - 1,$$

$$= 2 \cdot 2^{k+1} - 1$$

$$= 2^{k+1+1} - 1$$

$$= 2^{(k+1)+1} - 1$$

rechte Seite ist herausgekommen

4

Beispiel

Beh.:

$$(1+x)^n > 1 + n \cdot x$$

$n \geq 2 \quad x \in \mathbb{R}^{>-1} \quad x \neq 0$

Induktionsanfang Gilt die Aussage für $n=2$?

$$(1+x)^2 > 1 + 2 \cdot x$$

$$\Leftrightarrow 1 + 2x + x^2 > 1 + 2x$$

ja! Wegen $x \neq 0$ ist $x^2 > 0$

also $(1+2x) + \underbrace{x^2}_{>0}$ ist größer als $1+2x$

Induktionsschritt

Es gelte nun

$$(1+x)^n > 1 + n \cdot x$$

Wir müssen zeigen:

Dann gilt auch $(1+x)^{n+1} > 1 + (n+1) \cdot x$

$$
\begin{aligned}
(1+x)^{n+1} &= (1+x)^n \cdot (1+x) \\
&> (1+nx)(1+x) \\
&= 1 + x + nx + nx^2 \\
&= 1 + (1+n)\cdot x + nx^2 > 1 + (1+n)\cdot x
\end{aligned}
$$

weil $nx^2 > 0$ ist

Beispiel

Vorbemerkung $472 = 47 \cdot 10 + \underline{\underline{2}}$
Endziffer

$1084 = 108 \cdot 10 + \underline{\underline{4}}$

$700387 = 70038 \cdot 10 + \underline{\underline{7}}$

Behauptung 6^n hat stets die Endziffer 6

Sei $n = 1$: $6^1 = 6$ ✓

Die Aussage gilt nun für n.

Z.z. Die Aussage gilt auch für $n+1$, also

6^{n+1} hat die Endziffer 6

Beweis 6^n hat die Endziffer 6

$\Rightarrow$ Es gibt ein $s \in \mathbb{N}$ mit $6^n = s \cdot 10 + 6$ (s.o.)

$$6^{n+1} = 6^n \cdot 6^1$$
$$= (s \cdot 10 + 6) \cdot 6$$
$$= 60s + 36$$
$$= (s \cdot 60 + 30 + 6)$$
$$= (6s+3) \cdot 10 + 6$$

also hat auch 6^{n+1} die Endziffer 6.