Höhere Mathematik für Studienanfänger, Nebenfächler usw

$\boxed{\text{Video 7}}$

Binomialkoeffizient und binomischer Lehrsatz

Aus der Mittelstufe

Pascalsches Δ

$(a+b)^0 = \underline{\underline{1}}$ $(a+b) \neq 0$

$(a+b)^1 = 1a + 1b$

$(a+b)^2 = (a^2 + 2ab + b^2)$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}
$$

<u>Ohne</u> Rechnen liest man ab:

$(a+b)^4 = 1a^4 + (3+1)a^3b^1 + (3+3)a^2b^2 + (3+1)a^1b^3 + 1b^4$

$= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

<u>Ohne</u> Rechnen liest man ab:

$(a+b)^5 = 1a^5 + (1+4)a^4b^1 + (4+6)a^3b^2 + (6+4)a^2b^3 + (4+1)a^1b^4 + 1b^5$

$= a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^4$

aber was ist nun mit

$$\boxed{(a+b)^{12} = ?}$$

Um die Frage zu beantworten, bedarf es zwei Definitionen:

1.) Sei $n \in \mathbb{N}$

Unter $n!$ versteht man [n Fakultät]

$$\boxed{\begin{array}{l} n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n \\ \text{mit} \\ 0! = 1 \end{array}}$$

z.B.

$$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

$$6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$$

Die Berechnung großer $n!$ ist extrem zeitraubend; man benutzt deshalb fähige Rechenprogramme oder als Näherungsformel die Stirlingsche Formel.

② Für $n, k \in \mathbb{N}$, mit $n \geq k$ definiert man

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad \text{und} \quad \binom{n}{0} := \underline{1}$$

lies „n über k"

<u>Beispiele</u>

$$\binom{3}{2} = \frac{3!}{2!(3-2)!} = \frac{3\cdot 2\cdot 1}{2\cdot 1\cdot 1} = 3$$

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!(5-3)!} = \frac{5\cdot \cancel{4}\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{\cancel{2}\cdot 1\cdot \cancel{2}\cdot 1} = 30 \text{ usw}$$

<u>Man nennt $\binom{n}{k}$ „Binomialkoeffizient"</u>

2 wichtige Eigenschaften:

I $\quad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

II $\quad \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

Beweis zu I

l.S. $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

r.S. $\binom{n}{n-k} = \dfrac{n!}{(n-k)! \cdot (n-(n-k))!}$

$= \dfrac{n!}{(n-k)!(n-n+k)!}$

$= \dfrac{n!}{(n-k)!\ k!}$

$= \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

„beide Seiten sind gleich"

Beweis zu II

$$\binom{n+1}{k+1} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!\,[n+1-(k+1)]!}$$

r.S.

$$= \frac{(n+1)!}{(k+1)!\,(n-k)!}$$

l.S. $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$

$$= \frac{n!}{k!\,(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!\,(n-(k+1))!}$$

$$= \frac{n!}{k!\,(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)\cdot k!\,(n-k-1)!}$$

$$= \frac{n!\,(k+1)}{(k+1)\cdot k!\,(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)\cdot k!\,(n-k-1)!}\frac{(n-k)}{(n-k)}$$

$$= \frac{n!\,(k+1)}{(k+1)\cdot k!\,(n-k)!} + \frac{n!\,(n-k)}{(k+1)\cdot k!\,(n-k)!}$$

$$= \frac{n!\,(k+1)+n!\,(n-k)}{(k+1)!\,(n-k)!} = \frac{n!\,(\cancel{k}+1+n-\cancel{k})}{(k+1)!\,(n-k)!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!\,(n-k)!}$$

6

Damit ergibt sich der Verdacht:

$$(a+b)^2 = \cancel{1}a^2 + 2a^1b^1 + 1b^2$$

$$(a+b)^3 = 1a^3 + 3a^2b^1 + 3ab^2 + 1b^3$$

$$(a+b)^4 = 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b + 4ab^3 + 1b^4$$

$$\downarrow$$

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \binom{n}{n-1}a^1b^{n-1} + b^n$$

$$\overset{!}{=} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k$$

[Binomialsatz]

Muß man den Satz beweisen, greift man zum Verfahren der „vollständigen Induktion" (~~siehe Anhang~~)

Wegen der „Schreibarbeit":

$\cancel{(a+b)^{12} = ?}$

$$(a+b)^7 = \sum_{k=0}^{n=7} \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k$$

$$= \underbrace{\binom{7}{0} a^{7-0} \cdot b^0}_{k=0} + \underbrace{\binom{7}{1} a^{7-1} b^1}_{k=1} + \underbrace{\binom{7}{2} a^{7-2} b^2}_{k=2}$$

$$+ \binom{7}{3} a^{7-3} b^3 + \binom{7}{4} a^{7-4} b^4 + \binom{7}{5} a^{7-5} b^5$$

$$+ \binom{7}{6} a^{7-6} b^6 + \binom{7}{7} a^{7-7} b^7$$

mit z.B

$$\binom{7}{3} = \frac{7!}{3!\,(7-3)!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \cancel{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \cancel{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}}$$

$$= 35$$

www.raphael-beiwe.de

Ausblick Vieles über ZAHLENFOLGEN

8