

Höher  
Mathematik  
für

Studienanfänger,  
Neulinge usw

Video 7

Binomialkoeffizient  
und  
binomische Formel

# Lehrsatz der Mittelstufe

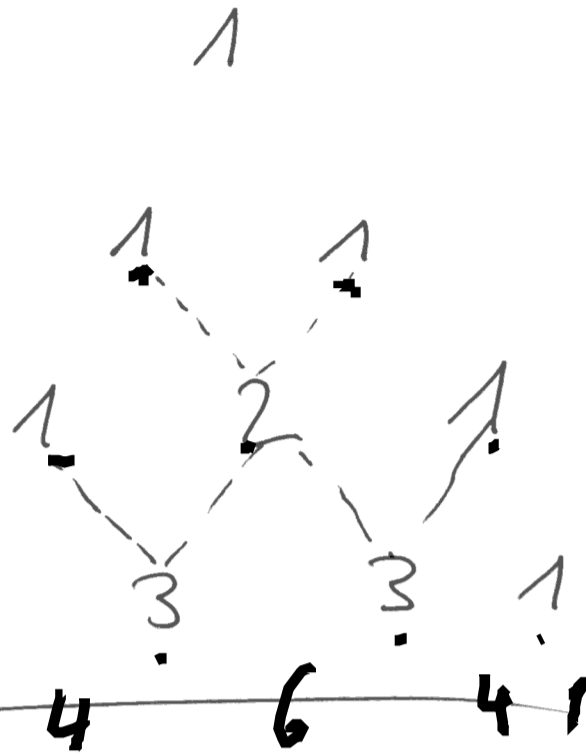
# Pascalsche $\Delta$

$$(a+b)^0 = \underline{\underline{1}} \quad (a+b) \neq 0$$

$$(a+b)^1 = \underline{1}a + \underline{1}b$$

$$(a+b)^2 = \underline{1}a^2 + \underline{2}ab + \underline{1}b^2$$

$$(a+b)^3 = \underline{1}a^3 + \underline{3}a^2b + \underline{3}ab^2 + \underline{1}b^3$$



Ohne Rechnen list man ab:

$$(a+b)^4 = 1a^4 + (3+1)a^3b + (3+3)a^2b^2 + (3+1)a^1b^3 + 1b^4$$
$$= \underline{1}a^4 + \underline{4}a^3b + \underline{6}a^2b^2 + \underline{4}ab^3 + \underline{1}b^4$$

Ohne Rechnen list man ab:

$$(a+b)^5 = \underline{1}a^5 + \underline{5}a^4b + \underline{10}a^3b^2 + \underline{10}a^2b^3 + \underline{5}ab^4 + \underline{1}b^5$$
$$= a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

also was ist nun mit

$$\boxed{(a+b)^{12} = ?}$$

1

Um die Frage zu beantworten, bedarf es zwei Definitionen:

① Sei  $n \in \mathbb{N}$

Unter  $n!$  versteht man [ $n$  Fakultät]

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$$

mit

$$0! = 1$$

z.B.

$$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

$$6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$$

Die Berechnung großer  $n!$  ist extrem zeitaufwendig; man benutzt deshalb folgende Reihenformeln oder als Näherungsformel die Stirling'sche Formel.

②

② Für  $n, k \in \mathbb{N}$ , mit  $n \geq k$  definiert man

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad \text{und} \quad \binom{n}{0} := 1$$

lies „n über k“

Beispiele

$$\binom{3}{2} = \frac{3!}{2!(3-2)!} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1 \cdot 1} = 3$$

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = 30 \text{ usw}$$

Man nennt  $\binom{n}{k}$  „Binomialkoeffizient“

2 wichtige Eigenschaften:

① 
$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

② 
$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

③

# Beweis zu I

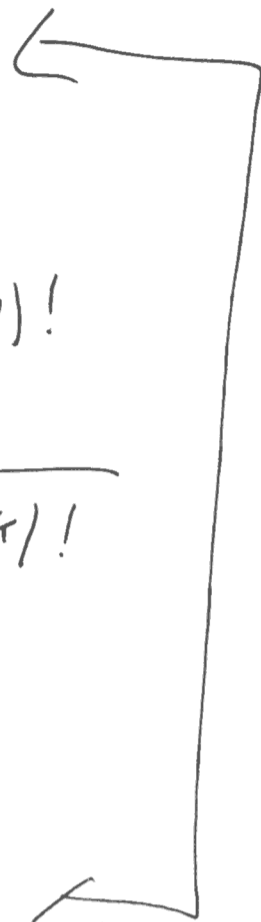
$$\text{l.S. } \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$\text{r.S. } \binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot (n-(n-k))!}$$

$$= \frac{n!}{(n-k)! \cdot (n-n+k)!}$$

$$= \frac{n!}{(n-k)! k!}$$

$$= \frac{n!}{k!(n-k)!}$$



beide Seiten  
" sind gleich"

(4)

Given that

$$\binom{n+1}{k+1} = \frac{(n+1)!}{(k+1)! [n+1-(k+1)]!}$$

$$\underline{\underline{\text{r.s.}}} = \frac{(n+1)!}{(k+1)! (n-k)!}$$

$$\underline{\underline{\text{l.s.}}} \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$$

$$= \frac{n!}{k! (n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)! (n-(k+1))!}$$

$$= \frac{n!}{k! (n-k)!} + \frac{n!}{(k+1) \cdot k! (n-k-1)!}$$

$$= \frac{n! (k+1)}{(k+1) \cdot k! (n-k)!} + \frac{n! (n-k)}{(k+1) \cdot k! (n-k-1)! (n-k)}$$

$$= \frac{n! (k+1)}{(k+1) \cdot k! (n-k)!} + \frac{n! (n-k)}{(k+1) \cdot k! (n-k)!}$$

$$= \frac{n! (k+1) + n! (n-k)}{(k+1)! (n-k)!} = \frac{n! (k+1+n-k)}{(k+1)! (n-k)!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)! (n-k)!}$$

Q

Dabei ergibt sich die Verteilung:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2a^1b^1 + 1b^2$$

$$(a+b)^3 = 1a^3 + 3a^2b^1 + 3ab^2 + 1b^3$$

$$(a+b)^4 = 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4$$

↓

$$(a+b)^m = a^m + \binom{m}{1} a^{m-1} b^1 + \binom{m}{2} a^{m-2} b^2 + \dots + \binom{m}{n-1} a^1 b^{n-1} + b^m$$

$$= \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} a^{m-k} \cdot b^k \quad \underline{\underline{[Binomialatz]}}$$

Muß man den Satz beweisen, darf man zum Beweis  
den "vollständigen Induktion" (siehe ~~Aufgabe~~)

(7)

Wege der "Schreibarbeit":

$$\frac{(a+b)^{12} = ?}{}$$

$$(a+b)^7 = \sum_{k=0}^{n=7} \binom{7}{k} a^{7-k} \cdot b^k$$

$$= \underbrace{\binom{7}{0} a^{7-0} \cdot b^0}_{k=0} + \underbrace{\binom{7}{1} a^{7-1} b^1}_{k=1} + \underbrace{\binom{7}{2} a^{7-2} b^2}_{k=2}$$

$$+ \binom{7}{3} a^{7-3} b^3 + \binom{7}{4} a^{7-4} b^4 + \binom{7}{5} a^{7-5} b^5$$

$$+ \binom{7}{6} a^{7-6} b^6 + \binom{7}{7} a^{7-7} b^7$$

mit z.B.

$$\binom{7}{3} = \frac{7!}{3! (7-3)!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

$$= \underline{\underline{35}}$$

www.rechner-lexikon.de

Ausblick Viles über ZAHLENFOLGEN

(8)