Gegeben seien $f(x)=x^2-1$ und $g(x)=-e^{-x}(1-x^2)$

a) Diskutiere $g(x)$:

a1) Grenzwerte

a2) Nullstellen

a3) max Definitionsbereich

a4) Extrema

a5) Wendestellen

b) Zeichne mit GEOGEBRA den Graphen zu g

c) Berechne $\int g(x)\,dx$

d) Die Graphen von f und g sowie $y=0$ bilden eine Fläche, deren Inhalt zu berechnen ist.

e) Untersuche das uneigentliche Integral:

$$\int_1^{+\infty} g(x)\,dx$$

A

zu a1) Grenzwerte

$$g(x) = -\boxed{e^{-x}}(1-x^2)$$

$$\boxed{= -\frac{1-x^2}{e^x}}$$

$$\lim_{x \to +\infty} -\frac{\overset{\to -\infty}{1-x^2}}{\underset{\to +\infty}{e^x}} = 0 \quad \cancel{-(-\infty) = +\infty}$$

weil die e-Funktion den Grenzwert bestimmt

$$\lim_{x \to -\infty} -\frac{1-x^2}{e^x} = +\infty \quad \text{weil } \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{e^x} = \infty \text{ ist.}$$

Übersicht meiner Lateinvideos auf:
https://www.youtube.com/user/NachhilfeLatein/playlists
Übersicht meiner Mathevideos auf:
https://www.youtube.com/user/Mathematikaufgaben/playlists
Alle Videounterlagen als pdf zum Downloaden unter:
http://www.raphael-biere.de/

a2) Nullstellen

$$g(x) = \boxed{\underbrace{-e^{-x}}_{\neq 0} \cdot \underbrace{(1-x^2)}} = 0$$

$$1 - x^2 = 0$$

$$1 = x^2$$

$$\boxed{x_1 = +1 \qquad x_2 = -1}$$

a3) max Definitionsbereich:

Da die e-Funktion (und x^2) für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert sind und $e^{+x} \neq 0$ ist, gilt

$$\boxed{D(f) = \mathbb{R}}$$

Übersicht meiner Lateinvideos auf:
https://www.youtube.com/user/NachhilfeLatein/playlists
Übersicht meiner Mathevideos auf:
https://www.youtube.com/user/Mathematikaufgaben/playlists
Alle Videounterlagen als pdf zum Downloaden unter:
http://www.raphael-biere.de/

a4 Extrema

$$g(x) = \underbrace{-e^{-x}}_{u(x)} \cdot \underbrace{(1-x^2)}_{v(x)}$$

$$g'(x) = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$g'(x) = -(-e^{-x}) \cdot (1-x^2) + (-e^{-x})(-2x)$$

$$= e^{-x}(1-x^2) + 2xe^{-x}$$

notw. Bed

$$\overset{!}{=} e^{-x} \cdot \left[1 - x^2 + 2x\right] = 0$$

$$e^{-x} \neq 0!$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$1 - x^2 + 2x = 0 \quad | \cdot (-1)$$

$$x^2 - 2x - 1 = 0$$

$\cancel{\text{f x}}$ 1

$$x_{1|2} = 1 \pm \sqrt{1+1}$$

$$x_1 = 1 + \sqrt{2}$$

$$x_2 = 1 - \sqrt{2}$$

3

hinr. Bed. $g'(x)=0 \wedge g''(x) \neq 0$

Es war $g'(x) = \underbrace{e^{-x}}_{u(x)} \cdot \underbrace{\left[1-x^2+2x\right]}_{v(x)}$

$$g''(x) = -e^{-x} \cdot \left[1-x^2+2x\right] + e^{-x} \cdot \left[-2x+2\right]$$

$$= e^{-x} \cdot \left[-1+x^2-2x-2x+2\right]$$

$$= e^{-x} \cdot \left[x^2-4x+1\right]$$

TR
$$\left.\begin{array}{l} g''(1+\sqrt{2}) \approx -31{,}62 < 0 \\ g''(1-\sqrt{2}) \approx 1{,}87 > 0 \end{array}\right\} \neq 0$$