

Gegeben seien $f(x) = x^2 - 1$ und $g(x) = -e^{-x}(1-x^2)$

(a) Diskutiere $g(x)$:

(a1) Grenzwert

(a2) Nullstellen

(a3) max Definitionsbereich

(a4) Extrema

(a5) Wendestellen

(b) Zeichne mit **COCCO** den Graphen zu g

(c) Zeichne $\int g(x) dx$

(d) Die Graphen von f und g sowie $y=0$ bilden eine Fläche, deren Inhalt zu berechnen ist.

(e) Untersuche das uneigentliche Integral:

$$\int_1^{+\infty} g(x) dx$$

(A)

2091

grenzwert

$$g(x) = -e^{-x}(1-x^2)$$

$$= -\frac{1-x^2}{e^x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1-x^2}{e^x} = 0$$

$\rightarrow -\infty = +\infty$

weil die e-Funktion den Grenzwert bestimmt

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{1-x^2}{e^x} = +\infty$$

weil $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^x} = \infty$
ist.

Übersicht meiner Lateinvideos auf:

<https://www.youtube.com/user/NachhilfeLatein/playlists>

Übersicht meiner Mathevideos auf:

<https://www.youtube.com/user/Mathematikaufgaben/playlists>

Alle Videounterlagen als pdf zum Downloaden unter:

<http://www.raphael-biere.de/>

(a2) Nullstelle

$$g(x) = \underbrace{-e^{-x}}_{\neq 0} \cdot \underbrace{(1-x^2)}_{=0} = 0$$

$\neq 0$

$$1-x^2=0$$

$$1=x^2$$

$$\underline{x_1 = +1}$$

$$\underline{x_2 = -1}$$

(a3) max Definitionsbereich:

Da die e -Funktion (und x^2) für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert sind und $e^{+x} \neq 0$ ist,

folgt

$$D(f) = \mathbb{R}$$

Übersicht meiner Lateinvideos auf:

<https://www.youtube.com/user/NachhilfeLatein/playlists>

Übersicht meiner Mathevideos auf:

<https://www.youtube.com/user/Mathematikaufgaben/playlists>

Alle Videounterlagen als pdf zum Downloaden unter:

<http://www.raphael-biere.de/>

04) Extrema

$$g(x) = \underbrace{-e^{-x}}_{u(x)} \cdot \underbrace{(1-x^2)}_{v(x)}$$

$$g'(x) = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$g'(x) = -(-e^{-x}) \cdot (1-x^2) + (-e^{-x}) \cdot (-2x)$$
$$= e^{-x}(1-x^2) + 2xe^{-x}$$

Möw. Pkt

$$e^{-x} \cdot [1-x^2+2x] = 0$$

$$e^{-x} \neq 0!$$

\Leftrightarrow

$$1-x^2+2x=0 \quad | \cdot (-1)$$

$$x^2-2x-1=0$$

~~$x=1$~~

$$x_{1/2} = 1 \pm \sqrt{1+1}$$

$$x_1 = 1 + \sqrt{2}$$

$$x_2 = 1 - \sqrt{2}$$

3

limv. fct $g'(x)=0 \wedge g''(x) \neq 0$

Es war $g'(x) = \underbrace{e^{-x}}_{u(x)} \cdot \underbrace{[1-x^2+2x]}_{v(x)}$

$$g''(x) = -e^{-x} \cdot [1-x^2+2x] + e^{-x} \cdot [-2x+2]$$

$$= e^{-x} \cdot [-1+x^2-2x-2x+2]$$

$$= e^{-x} \cdot [x^2-4x+1]$$

(TR) $g''(1+\sqrt{2}) \approx -31,62 < 0$
 $g''(1-\sqrt{2}) \approx 1,87 > 0$ } $\neq 0$

(4)

(a5) Wendestellen

Nolw Teil

$$g''(x) = 0$$

$$e^{-x} \cdot [x^2 - 4x + 1] = 0 \quad | : e^{-x} \neq 0$$

$$x^2 - 4x + 1 = 0$$

$$x_{1/2} = 2 \pm \sqrt{4-1}$$

$$x_1 = 2 + \sqrt{3}$$

$$x_2 = 2 - \sqrt{3}$$

lim v. Teil

$$g''(x) = 0 \wedge g'''(x) \neq 0$$

$$\text{Es war } g''(x) = \underbrace{e^{-x}}_{u(x)} \cdot \underbrace{[x^2 - 4x + 1]}_{v(x)}$$

$$g'''(x) = \underbrace{-e^{-x}}_{u'} \cdot \underbrace{[x^2 - 4x + 1]}_v + \underbrace{e^{-x}}_u \cdot \underbrace{[2x - 4]}_{v'}$$

$$= e^{-x} \cdot [-x^2 + 4x - 1 + 2x - 4]$$

$$= e^{-x} \cdot [-x^2 + 6x - 5]$$

(5)

und z.B. über den TR bedauerlich

$$g'''(2+\sqrt{3}) \neq 0 \text{ und } g'''(2-\sqrt{3}) \neq 0$$

(b)
Zeichnung

Mit GEOGEBRA plus grobe Überprüfung der bisher errechneten Ergebnisse

6

Übersicht meiner Lateinvideos auf:

<https://www.youtube.com/user/NachhilfeLatein/playlists>

Übersicht meiner Mathevideos auf:

<https://www.youtube.com/user/Mathematikaufgaben/playlists>

Alle Videounterlagen als pdf zum Downloaden unter:

<http://www.raphael-biere.de/>

6

$$\textcircled{c} \int -e^{-x} \cdot (1-x^2) dx$$

Bsp. "multiplikativ" Zusammenge-
setzter Funktionen empfiehlt sich

die partielle Integration:

$$\int u' \cdot v = u \cdot v - \int u \cdot v'$$

Residual
maß "einfach"
gen als das
Ausgangintegral

Übersicht meiner Lateinvideos auf:

<https://www.youtube.com/user/NachhilfeLatein/playlists>

Übersicht meiner Mathevideos auf:

<https://www.youtube.com/user/Mathematikaufgaben/playlists>

Alle Videounterlagen als pdf zum Downloaden unter:

<http://www.rafael-biere.de/>

7

$$\int \underbrace{-e^{-x}}_{u'} \cdot \underbrace{(1-x^2)}_v dx$$

$$u' = -e^{-x}$$

$$u = e^{-x}$$

$$v = 1-x^2$$

$$v' = -2x$$

$$= \underbrace{e^{-x}}_u \cdot \underbrace{(1-x^2)}_v - \int \underbrace{e^{-x} \cdot (-2x)}_{\text{ist „einfach“!}}$$

$$= e^{-x} \cdot (1-x^2) + 2 \int e^{-x} \cdot x$$

Zur Berechnung: zweite part. Int.

$$\int \underbrace{e^{-x}}_{u'} \cdot \underbrace{x}_v = -e^{-x} \cdot x - \int \underbrace{-e^{-x} \cdot 1}_{\text{ist „einfach“!}}$$

$$= -e^{-x} \cdot x + \int e^{-x}$$

$$= \underline{\underline{-e^{-x} \cdot x - e^{-x}}}$$

(8)

$$e^{-x} \cdot (1-x^2) + 2 \int e^{-x} \cdot x$$

$$= e^{-x} \cdot (1-x^2) + 2 \cdot \left[-x \cdot e^{-x} - e^{-x} \right] + C_1$$

$$= e^{-x} \cdot (1-x^2) - 2xe^{-x} - 2e^{-x} + C$$

$$= e^{-x} \left[1-x^2-2x-2 \right] + C$$

$$= e^{-x} \left[-x^2-2x-1 \right] + C = \int g(x) dx$$

Übersicht meiner Lateinvideos auf:

<https://www.youtube.com/user/NachhilfeLatein/playlists>

Übersicht meiner Mathevideos auf:

<https://www.youtube.com/user/Mathematikaufgaben/playlists>

Alle Videounterlagen als pdf zum Downloaden unter:

<http://www.raphael-biere.de/>

⑨