Gegeben seien $f(x)=x^2-1$ und $g(x)=-e^{-x}(1-x^2)$

(a) Diskutiere $g(x)$:

(a1) Grenzwerte

(a2) Nullstellen

(a3) max Definitionsbereich

(a4) Extrema

(a5) Wendestellen

(b) Zeichne mit GEOGEBRA den Graphen zu g

(c) Berechne $\int g(x)\,dx$

(d) Die Graphen von f und g sowie $y=0$ bilden eine Fläche, deren Inhalt zu berechnen ist.

(e) Untersuche das uneigentliche Integral:

$$\int_1^{+\infty} g(x)\,dx$$

A

zu a1) Grenzwerte

$$g(x) = -\boxed{e^{-x}}(1-x^2)$$

$$\boxed{= -\frac{1-x^2}{e^x}}$$

$$\lim_{x \to +\infty} -\frac{\boxed{1\underbrace{-x^2}_{\to -\infty}}}{\boxed{\underbrace{e^x}_{\to +\infty}}} = 0 \quad \cancel{-(-\infty) = +\infty}$$

weil die e-Funktion den Grenzwert bestimmt

$$\lim_{x \to -\infty} -\frac{1-x^2}{e^x} = +\infty \text{ weil } \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{e^x} = \infty$$

ist.

Übersicht meiner Lateinvideos auf:
https://www.youtube.com/user/NachhilfeLatein/playlists
Übersicht meiner Mathevideos auf:
https://www.youtube.com/user/Mathematikaufgaben/playlists
Alle Videounterlagen als pdf zum Downloaden unter:
http://www.raphael-biere.de/

a2) Nullstellen

$$g(x) = \underbrace{-e^{-x}}_{\neq 0} \cdot \underbrace{(1-x^2)}_{} = 0$$

$$1 - x^2 = 0$$

$$1 = x^2$$

$$\underline{\underline{x_1 = +1}} \qquad \underline{\underline{x_2 = -1}}$$

a3) max Definitionsbereich:

Da die e-Funktion (und x^2) für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert sind und $e^{+x} \neq 0$ ist, gilt

$$D(f) = \mathbb{R}$$

Übersicht meiner Lateinvideos auf:
https://www.youtube.com/user/NachhilfeLatein/playlists
Übersicht meiner Mathevideos auf:
https://www.youtube.com/user/Mathematikaufgaben/playlists
Alle Videounterlagen als pdf zum Downloaden unter:
http://www.raphael-biere.de/

a4 Extrema

$$g(x) = \underbrace{-e^{-x}}_{u(x)} \cdot \underbrace{(1-x^2)}_{v(x)}$$

$$g'(x) = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$g'(x) = -(-e^{-x}) \cdot (1-x^2) + (-e^{-x})(-2x)$$

$$= e^{-x}(1-x^2) + 2xe^{-x}$$

notw. Bed

$$\overset{!}{=} e^{-x} \cdot \left[1 - x^2 + 2x\right] = 0$$

$$e^{-x} \neq 0!$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$1 - x^2 + 2x = 0 \quad | \cdot (-1)$$

$$x^2 - 2x - 1 = 0$$

$$x_{1|2} = 1 \pm \sqrt{1+1}$$

$$x_1 = 1 + \sqrt{2}$$

$$x_2 = 1 - \sqrt{2}$$

3

<u>hinr. Bed</u> $g'(x) = 0 \wedge g''(x) \neq 0$

Es war $g'(x) = \underbrace{e^{-x}}_{u(x)} \cdot \underbrace{\left[1 - x^2 + 2x\right]}_{v(x)}$

$$g''(x) = -e^{-x} \cdot \left[1 - x^2 + 2x\right] + e^{-x} \cdot \left[-2x + 2\right]$$

$$= e^{-x} \cdot \left[-1 + x^2 - 2x - 2x + 2\right]$$

$$= e^{-x} \cdot \left[x^2 - 4x + 1\right]$$

TR $\left.\begin{array}{l} g''(1+\sqrt{2}) \approx -31{,}62 < 0 \\ g''(1-\sqrt{2}) \approx 1{,}87 > 0 \end{array}\right\} \neq 0$

(a5) Wendestellen

notw. Bed. $\boxed{g''(x)=0}$

$$e^{-x}\cdot\left[x^2-4x+1\right]=0 \quad \Big| : e^{-x}\neq 0$$

$$x^2-4x+1=0$$

$$x_{1|2}=2\pm\sqrt{4-1}$$

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 &= 2+\sqrt{3} \\ x_2 &= 2-\sqrt{3} \end{aligned}}$$

hinr. Bed. $\boxed{g''(x)=0 \wedge g'''(x)\neq 0}$

Es war $g''(x)=\underbrace{e^{-x}}_{u(x)}\cdot\underbrace{\left[x^2-4x+1\right]}_{v(x)}$

$$g'''(x)=\underbrace{-e^{-x}}_{u'}\cdot\underbrace{\left[x^2-4x+1\right]}_{v}+\underbrace{e^{-x}}_{u}\cdot\underbrace{\left[2x-4\right]}_{v'}$$

$$=e^{-x}\cdot\left[-x^2+4x-1+2x-4\right]$$

$$\boxed{=e^{-x}\cdot\left[-x^2+6x-5\right]}$$

(5)

und z.B. über den TR berechnen

$g'''(2+\sqrt{3}) \neq 0$ und $g'''(2-\sqrt{3}) \neq 0$

b

Zeichnung

mit GEOGEBRA plus grobe Überprüfung der bisher errechneten Ergebnisse

6

Übersicht meiner Lateinvideos auf:
https://www.youtube.com/user/NachhilfeLatein/playlists
Übersicht meiner Mathevideos auf:
https://www.youtube.com/user/Mathematikaufgaben/playlists
Alle Videounterlagen als pdf zum Downloaden unter:
http://www.raphael-biere.de/

6

(c) $\int -e^{-x} \cdot (1-x^2)\, dx$

Bei „multiplikativ" zusammengesetzten Funktionen empfiehlt sich die partielle Integration:

$$\int u' \cdot v = u \cdot v - \int u \cdot v'$$

Restintegral **muß** „einfacher" sein als das Ausgangsintegral

Übersicht meiner Lateinvideos auf:
https://www.youtube.com/user/NachhilfeLatein/playlists
Übersicht meiner Mathevideos auf:
https://www.youtube.com/user/Mathematikaufgaben/playlists
Alle Videounterlagen als pdf zum Downloaden unter:
http://www.raphael-biere.de/

$$\boxed{\int \underbrace{-e^{-x}}_{u'} \cdot \underbrace{(1-x^2)}_{v} dx}$$

$u' = -e^{-x}$

$u = e^{-x}$

$v = 1-x^2$

$v' = -2x$

$$= \underbrace{e^{-x}}_{u} \cdot \underbrace{(1-x^2)}_{v} - \boxed{\underbrace{\int e^{-x} \cdot (-2x)}_{\text{ist „einfach"}}}$$

$$= e^{-x} \cdot (1-x^2) + 2 \boxed{\int e^{-x} \cdot x}$$

Zwischenrechnung: Nochmal part. Int.

$$\int \underbrace{e^{-x}}_{u'} \cdot \underbrace{\cancel{x}}_{v} = -e^{-x} \cdot x - \underbrace{\int -e^{-x} \cdot 1}_{\text{ist „einfach"}}$$

$$= -e^{-x} \cdot x + \int e^{-x}$$

$$\boxed{= -e^{-x} \cdot x - e^{-x}}$$

(8)

$$e^{-x}\cdot(1-x^2)+2\int e^{-x}\cdot x$$

$$=\boxed{e^{-x}\cdot(1-x^2)+2\cdot\left[-x\cdot e^{-x}-e^{-x}\right]+C_1}$$

$$=e^{-x}\cdot(1-x^2)-2xe^{-x}-2e^{-x}+C$$

$$=e^{-x}\left[1-x^2-2x-2\right]+C$$

$$=\boxed{\underline{\underline{e^{-x}\left[-x^2-2x-1\right]+C}}=\int g(x)\,dx}$$

d) Bei zu berechnenden Flächen empfiehlt sich die Veranschauung per Grafik:

<u>Ansatz</u>

$$\int_{-1}^{0} f + \int_{0}^{1} g = A_{Gesamt}$$

(Skizze!!)

1.

$$\int_{-1}^{0} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} (x^2-1)\,dx$$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3 - x\right]_{-1}^{0}$$

$$= [0-0] - \left[\frac{1}{3}(-1)^3 - (-1)\right]$$

$$= 0 - \left[-\frac{1}{3} + 1\right]$$

$$= -\frac{2}{3}$$ [weil unterhalb d. x-Achse]

$$\boxed{A_1 = +\frac{2}{3}\ \text{FE}}$$ ✓

Übersicht meiner Lateinvideos auf:
https://www.youtube.com/user/NachhilfeLatein/playlists
Übersicht meiner Mathevideos auf:
https://www.youtube.com/user/Mathematikaufgaben/playlists
Alle Videounterlagen als pdf zum Downloaden unter:
http://www.raphael-biere.de/

(2.) $\int_0^1 g(x)\,dx = \left[e^{-x} \left[-x^2 - 2x - 1 \right] \right]_0^1$

$= \left[e^{-1} (-1 - 2 - 1) \right] - \left[e^0 (-0^2 - 0 - 1) \right]$

$= \left[e^{-1} \cdot (-4) \right] - \left[1 \cdot (-1) \right]$

$= -\frac{4}{e} + 1$

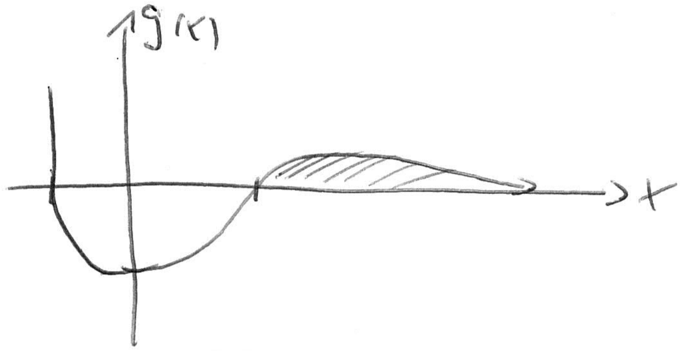
$= 1 - \frac{4}{e}$ (<0 weil unterhalb)

$\Rightarrow A_2 = \frac{4}{e} - 1 \approx 0{,}47$

$\Rightarrow A_G = \frac{2}{3} + \frac{4}{e} - 1 = \frac{4}{e} - \frac{1}{3}$

1,14

(e) $\displaystyle\int_1^{+\infty} g(x)\,dx$



$$= \lim_{z\to\infty} \int_1^{\boxed{z}} g(x)\,dx \qquad \boxed{\left(\text{falls } \lim_{z\to\infty} \text{ existiert u. endlich ist}\right)}$$

<u>Nr</u>

$$\int_1^z g(x)\,dx = \left[e^{-x}\left(-x^2-2x-1\right)\right]_1^z$$

$$= \left[e^{-z}\left(-z^2-2z-1\right)\right] - \left[e^{-1}\cdot(-1-2-1)\right]$$

$$\boxed{= e^{-z}\cdot\left(-z^2-2z-1\right) + \boxed{\frac{4}{e}}}$$

$$\lim_{z\to\infty}\left[e^{-z}\cdot\left(-z^2-2z-1\right)+\frac{4}{e}\right] \doteq \lim_{z\to\infty}\left[\underbrace{e^{-z}}_{\to 0}\underbrace{\left(-z^2-2z-1\right)}_{-\infty}\right] + \boxed{\frac{4}{e}}$$

$$= \frac{4}{e}$$ weil die „e-Funktion" die „Parabel" „<u>besiegt</u>".

$\approx$ <u>1,47</u>

13