ln - Schar

Gegeben sei $f_t(x) = \frac{-t + \ln(x)}{tx}$

ⓐ Bestimme den max Def-bereich, führe ein dis bezügliche Randbetrachtung durch und stelle mithilfe von $\boxed{\text{GEOGEBRA}}$ die Schar dar: gibt es Einschränkungen bezüglich t?

ⓑ Bestimme - soweit möglich - Nullstellen, Symmetrie, Grenzwerte (siehe auch (a)), Extrema und Wendepunkte.

ⓒ Alle Graphen der Schar gehen durch einen (gemeinsamen) Punkt: berechne!

ⓓ Berechne die Ortskurve aller Extrema.

ⓔ Berechne $\int f_t(x)\,d(x)$

ⓕ Untersuche, ob sich - hinreichend exakt - ein uneigentliches Integral mithilfe von $f_t(x)$ definieren lässt.

$$f_t'(x)=0 \Leftrightarrow 1+t-\ln x=0 \quad [\text{notw. Bed.}]$$

$$\Leftrightarrow \ln x = 1+t \quad | e^{()}$$

$$\Leftrightarrow x = e^{1+t}$$

hinr. Bed. $\quad f'(x)=0 \wedge f''(x)\neq 0$

$$f_t'(x)=\frac{1+t-\ln x}{tx^2}$$

$$u(x)=1+t-\ln x$$

$$v(x)=tx^2$$

$$u'(x)=-\frac{1}{x}$$

$$v'(x)=2tx$$

$$f_t''(x)=\left[\frac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2}\right]=\frac{-\frac{1}{x}\cdot tx^2-(1+t-\ln x)\cdot 2tx}{(tx^2)^2}$$

$$=\frac{-tx-2tx-2t^2x+2tx\ln x}{t^2x^4}$$

$$=\frac{xt\cdot[-1-2-2t+2\ln x]}{t^2x^4}$$

$$=\frac{-3-2t+2\ln x}{tx^3} \checkmark$$

$\boxed{5}$

Kandidat war $x=e^{1+t}$

$$l_t''\left(e^{1+t}\right)=\frac{-3-2t+2(1+t)}{t\cdot\left(e^{1+t}\right)^3}$$

$$=\frac{\overbrace{-1}^{<0}}{t\underbrace{\left(e^{1+t}\right)^3}_{>0}}$$

Fall $t>0$: $l_t''\left(e^{1+t}\right)<0$ Maxi

Falls $t<0$: $l_t''\left(e^{1+t}\right)>0$ Mini

(siehe auch Graph 4!)

Übersicht meiner Lateinvideos auf:
https://www.youtube.com/user/NachhilfeLatein/playlists
Übersicht meiner Mathevideos auf:
https://www.youtube.com/user/Mathematikaufgaben/playlists
Alle Videounterlagen als pdf zum Downloaden unter:
http://www.raphael-biere.de/

Wendepunkte

Notw. Bed. $f_t''(x)=0$

$$\Leftrightarrow \boxed{-3-2t+2\ln x=0}$$

$$\Leftrightarrow 2\ln x = 3+2t \quad |:2$$

$$\Leftrightarrow \ln x = 1.5+t \quad |e^{()}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\underline{x = e^{1.5+t}}}$$

Wir sparen uns an dieser Stelle die explizite Berechnung der 3. Ableitung; sie lautet

$$\boxed{f_t'''(x) = \frac{11+6t-6\ln x}{t\cdot x^4}}$$

und $f_t'''(e^{1,5+t}) = \dfrac{11+6t-6(1,5+t)}{[t\cdot(e^{1,5+t})]^4}$

$\neq 0$

$\Rightarrow$ WP bei $x = e^{1,5+t}$ $\boxed{7}$

$\boxed{c}$ $f_t(x) = \frac{-t+\ln x}{tx}$

Wir betrachten ($t_1 \neq t_2$) 2 verschiedene Graphen, die einen gemeinsamen Punkt haben sollen:

$$\frac{-t_1+\ln x}{t_1 \cdot x} \overset{?}{=} \frac{-t_2+\ln x}{t_2 \cdot x} \quad | \cdot t_1 t_2 x$$

$$(-t_1+\ln x)t_2 = (-t_2+\ln x)t_1$$

$$-t_1t_2+t_2\ln x = -t_1t_2+t_1\ln x \quad | +t_1t_2$$

$$t_2 \ln x = t_1 \ln x \quad | -t_1 \ln x$$

$$(t_2-t_1)\ln x = 0 \quad | : (t_2-t_1) \neq 0$$

$$\ln x = 0$$

$$\underline{\underline{x = 1}}$$

Alle Graphen der Schar gehen durch $(1|f_t(1))$

$= (1|-1)$ (Graf 4!!)